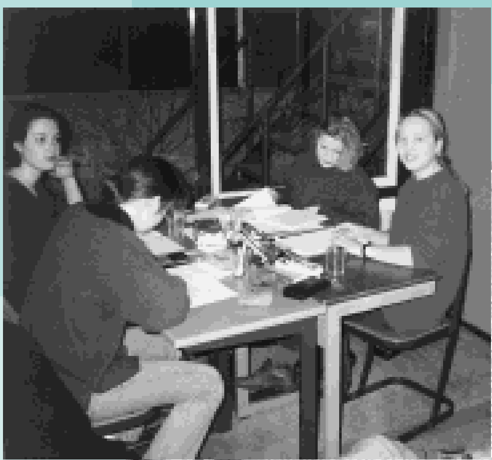
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 70
1994-1995 nov./dec.
3





Vbo- en mavo-examens 1994

Wiskunde A-lympiade

VIERKANT zomerkamp 1994

Verslag van studiereis naar Schotland

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie ‘Richtlijnen voor auteurs’ op bladzijde 94.
De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden
Ledenadministratie
F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218; fax 076-653218.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

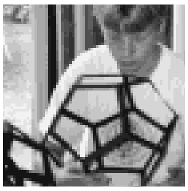
Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (adres: zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Inhoud









INTERVIEW

'Je moet ermee bezig blijven'

Martinus van Hoorn

Nettie Harthoorn-Postma, 37 jaar, woonachtig te Wezep (Noord-Veluwe), is sinds vorig jaar lerares te Meppel aan de nevenvestiging van de Scholengemeenschap Greijdanus te Zwolle; deze nevenvestiging was voorheen de Hendrik de Cockmavo te Meppel.

Hoeveel eerste en tweede klassen heb je? Wil je graag eerste en tweede klassen?
Ik had vorig jaar twee eerste klassen en één tweede klas, en ook dit jaar heb ik twee eerste klassen en één tweede klas.
Nu zie ik in de tweede klas het vervolg van de eerste klas, en in de eerste klas heb ik voor het tweede jaar hetzelfde boek. Ik hoef in de eerste klassen niet meer te ontdekken welke dingen moeilijk zijn (zoals schaal, en verhoudingen). Daarom wou ik ook meteen weer eerste klassen.

Hoe zijn de klassen samengesteld, en welke versies van het boek gebruik je daarbij?
We hebben in de onderbouw een brede leerlingenpopulatie, met twee soorten eerste klassen, mavo/havo/vwo en vbo/mavo. De versies van het boek (Moderne Wiskunde) zijn daar op geschreven. Leerlingen met een gymnasiumperspectief, of, aan de andere kant, i-leerlingen en zwakke vbo-leerlingen gaan direct of na 1 jaar naar de hoofdvestiging in Zwolle.

Sla je wel eens iets over? Gebruik je het werkblok?
De opgaven aan het eind van de hoofdstukken worden niet door alle leerlingen gedaan. Snelle leerlingen slaan de eenvoudige opgaven over, andere leerlingen doen de moeilijkere opgaven niet.



Ik gebruik het werkblok vrij intensief. Gelukkig is het werkblok verbeterd, sommige knip-opdrachten staan nu op dikker papier achterin, wat soms ook echt nodig is.

Dit jaar werk je voor het eerste sinds jaren niet meer in het volwassenenonderwijs (in Harderwijk). Wat is voor jou het belangrijkste verschil tussen het volwassenenonderwijs en het gewone dagonderwijs? Zijn de nieuwe programma's geschikt voor het volwassenenonderwijs?
In het dagonderwijs heb je veel meer tijd! De volwassenen zijn vaak consumptiever ingesteld, ze slikken alles, en ze willen altijd aan het vak werken. Jonge kinderen leggen echt niet automatisch het boek op tafel.
Ik heb met de volwassenen wel eens stukken gedaan uit het nieuwe programma. De stof op zich is heel geschikt voor ze; de boeken zijn natuurlijk typisch voor jonge kinderen geschreven.

Jullie school doet mee aan het PIT-project. Wat is dat voor project, en waarom vind je het belangrijk om er aan mee te doen?
Het PIT-project heeft als bedoeling het gebruik van de computer, beter gezegd het gebruiken van de informatietechnologie, te verbeteren. Wij doen mee met de vakken Frans, Engels en wiskunde. Bij wiskunde werken we aan toetsing met behulp van de computer. De meeste energie gaat zitten in het uitproberen van mogelijkheden, zowel de leerlingen als ikzelf leren er een heleboel van. Je blijft zo met je vak bezig, je gaat vanzelf over een drempel, en zo moet het ook!
Leerlingen willen soms alles wat op het scherm komt ook in hun schrift hebben, bijvoorbeeld een compleet getekend rooster. Op zulke dingen moet je altijd letten. Verder hebben ze soms een behoorlijke voorkennis nodig, bijvoorbeeld inzake grafieken.

Hoe gaat het straks met de afsluiting van de basisvorming?
Geen idee! De havo- en vwo-leerlingen kunnen dat natuurlijk wel, en het boek krijgen we ook vast wel uit.

Dit artikel geeft eerst een samenvatting van de verslagen van de regionale besprekingen (Mahieu). Daarna komt een presentatie van de scoreresultaten en een evaluatieve terugblik op de examens (Bakker). Aan het eind treft u de open vragen van het D-examen als voorbeeld aan.

De wiskunde-examens vbo/mavo van 1994, eerste tijdvak

Freek Mahieu (NVvW)
Gert Bakker (Cito)

Samenvatting van de regionale besprekingen

D-niveau, algemeen

Niveau: niet moeilijk, iets aan de gemakkelijke kant; vlak werk (een 'zwembadsom' ontbrak); opgave 6 over huishoudelijk afval is een leuke, moderne opgave.
Tijd: gemiddeld aan de krappe kant, waardoor soms opgave 6 in het gedrang kwam; waarom krijgen leerlingen bij wiskunde niet, wat ze bij andere vakken wel krijgen: tijd om hun werk nog eens rustig na te kijken?
Normering: het vermelden van de aantallen punten voor de vragen werkt prima; te veel punten voor opgave 6.
Opmerkingen over de open vragen
Vraag 23: evenals 24 en 25 wel erg eenvoudige vragen over tweedegraads functies. Gezien de hoeveelheid tijd die aan dit onderwerp wordt besteed is opgave 1 teleurstellend mager.
Vraag 26: niet een vreemde term als 'viervlak' gebruiken; veel leerlingen hadden de figuur in het vragenboekje gebruikt om de lengten bij de zijden te schrijven: het is beter om zo'n tekening op de bijlage te plaatsen.
Vraag 27: het verschil tussen onder- en bovenvlak van het doosje is veel leerlingen ontgaan.
Vraag 28: een flauwe vraag over vectoren.
Vraag 29: een slecht gemaakte tweedegraads ongelijkheid; te abstract; past niet meer in deze tijd; beter in meerkeuzevragen.
Vraag 30: tezamen met 31 en 32 is deze opgave wat te veel van het goede.

C-niveau, algemeen

Niveau: juist; enkele verfrissende, originele opgaven, bijvoorbeeld de opgave over huisafval; overal positieve waardering; het werk vertoont invloeden van de experimentele examens, bijvoorbeeld de eis bij sommige vragen een motivering te geven; liever weer de bekende zinsnede boven het gehele open werk; het verschil tussen C en D is te gering; voor vbo-leerlingen is het examen aan de pittige kant, vooral door de vraag over loodrechte lijnen: had beter aan het eind kunnen staan.
Tijd: de beschikbare tijd was voldoende.
Normering: wegens het grote aantal vragen en de gedetailleerdheid van het correctievoorschrift was er dit jaar weinig ruimte voor eigen interpretatie, dus ook weinig discussie.
Opmerkingen over de open vragen
Vraag 26: vermenigvuldigen van een parabool werd meer als een D-onderdeel gezien.
Vraag 27: sommige leerlingen werden op het verkeerde spoor gezet door de term 'vierkante' toren.
Vraag 29: zeer weinig leerlingen zagen dat de ribben in de uitslag van de toren twee keer voorkomen, of ze vatten de vraag niet ruimtelijk op.

Vraag 30, 31 en 32: moeilijke opzet van opgave 3; stapeling; men had de lijnen beter in een assenstelsel op ruitjes kunnen laten tekenen; de tekening had beter op de bijlage kunnen staan.
Vraag 32: nagaan of lijnen loodrecht op elkaar staan is mooi voor een leerling die op een mavo-school voor D is opgeleid; het niveau is te hoog voor een normale C-leerling; als de leerling zelf had mogen tekenen, had hij meer kansen gehad; samenvattend: te moeilijk voor C.
Vraag 33: stapelt met vraag 34; geen haakjes gebruiken bij relevante informatie; waarom niet ‘op een geheel getal nauwkeurig’? ‘groenafval’ lijkt te veel op ‘afval’.
Vraag 34: niet twee vragen onder één nummer stellen.

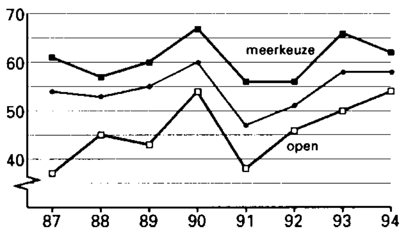
Deze opmerkingen worden samen met wat kleinere opmerkingen over het correctievoorschrift, doorgespeeld naar de leden van de adviescommissies en de vaksectie. Zij benutten deze meningen samen met de scoreresultaten bij de produktie van nieuwe examens.

Scoreresultaten

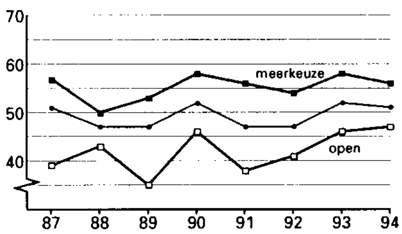
In tabel 1 (blz. 80) staan weer de belangrijkste resultaten over het D- en C-examen als geheel. In tabel 2 (blz. 80) zijn de resultaten weergegeven van de afzonderlijke vragen van D, in tabel 3 (blz. 80) van C.
Of je nu het percentage behaalde punten, het percentage onvoldoenden of het gemiddelde cijfer bekijkt, er is nauwelijks verschil met 1993.
In de grafieken 1, 2, 3 en 4 is het verloop door de jaren aangegeven.
Vanaf 1987 haalde D gemiddeld 55% van alle punten en C 49%; in 1994 D 58% en C 51%.
In 1987, 1988 en 1989 was slechts 30% van de vragen open. In 1990 kwam de verhouding half/half terug. Sindsdien is de opzet van het examen vrijwel gelijk gebleven.

In grafiek 1 en 2 is het percentage behaalde punten ook uitgesplitst in meerkeuzevragen en open vragen.
Het is duidelijk te zien dat de moeilijkheidsgraad van de beide vraagvormen dichter bij elkaar is komen te liggen. In een goed examen moeten de kandidaten bij beide vraagvormen de kans krijgen te laten zien wat ze waard zijn. Dat is in 1994 goed gelukt.
Het gemiddelde percentage onvoldoenden is vanaf 1987 35% voor D en 45% voor C (grafiek 3). Voor D is er nu al drie jaar geen cesuurverschuiving en voor C twee jaar.
Het gemiddelde cijfer is vanaf 1987 gemiddeld 6,0 voor D en 5,6 voor C (grafiek 4).

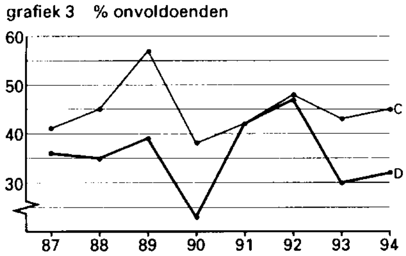
grafiek 1 % behaalde punten D



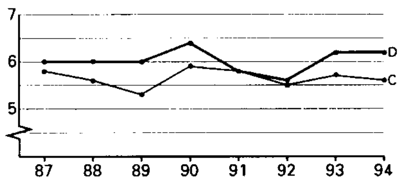
grafiek 2 % behaalde punten C



grafiek 3 % onvoldoenden



grafiek 4 gemiddeld cijfer



Na dit uitstapje in de historie gaan we terug naar 1994.
In het D-examen zijn jaarlijks 30 à 40 punten te behalen met vragen die verder gaan dan het C-programma. In 1993 en 1994 waren deze vragen veel beter toegankelijk dan voorheen. Dit jaar waren hiermee 36 punten te verdienen: daarvan behaalde men 52%.
Er waren acht meerkeuzevragen identiek in het D- en C-examen: gemiddelde p-waarden waren respectievelijk 70 en 52, een behoorlijk verschil. Dit komt erop neer dat een gemiddelde D-kandidaat op het C-examen ongeveer één cijferpunt hoger scoort dan op het D-examen.
Het lijkt me niet zo zinvol dit jaar opnieuw meerkeuzevragen te bespreken. Bij besprekingen van vorige examens is al veel gezegd. Kandidaten blijven in grote lijnen dezelfde dingen goed doen en dezelfde fouten maken. Aan de hand van tabel 2 en tabel 3 kunt u zelf een analyse maken.
De open vragen geven wel aanleiding om daarop in te gaan. Ten eerste omdat sommige dingen toch wat anders waren dan gebruikelijk. Ten tweede omdat opmerkingen van leraren daartoe aanleiding gaven.

Toch iets anders dan anders?

Een belangrijke, officieel aan de scholen meegedeelde verandering betreft de vraagformulering: ‘Teken de grafiek/parabool /lijn/cirkel.’ Voortaan kan volstaan worden met het tekenen van de grafiek/parabool/lijn/cirkel. Aanvullende informatie hoeft de kandidaat alleen te geven als daar expliciet om wordt gevraagd. (Uitleg Mededelingen O. en W. nr. 20 en 21 van 22 september 1993.) Voor de kandidaten is dit toegenomen duidelijkheid. Het kwam namelijk nogal eens voor dat kandidaten (en leraren?)

niet op de hoogte waren van de impliciete betekenis van 'tekenen'. Met deze verandering is het aantal kort-antwoord vragen iets toegenomen.
Ook een toename aan duidelijkheid betreft de toevoegingen: 'Schrijf de berekening/uitwerking /... op.' Adviescommissie- en vaksectieleden realiseerden zich hoe groot het verlies aan punten zou zijn als berekeningen niet werden opgeschreven. Door het gebruiksgemak van de rekenmachine wordt 'bereken' meer en meer ervaren als: toets de gegevens in en schrijf het (eind)resultaat op. Vooral bij de statistiek-opgave was dat gevaar niet denkbeeldig.
Het tot 1993 gehanteerde opschrift boven het open deel 'Schrijf de uitwerkingen van de volgende open vragen zo op, dat blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn' is vervallen. Het stond haaks op vragen als 'Teken de grafiek/…' en 'Schrijf een vergelijking op van …'. De leden van de adviescommissies en de vaksectie hebben er voor gekozen om voor C en D steeds per vraag zo goed mogelijk te laten uitkomen wat ze van de kandidaat willen weten.
Gaat het examen al de kant van het nieuwe programma op? Nee, het examen blijft inhoudelijk gebaseerd op het vigerende examenprogramma. Tegelijkertijd wordt voorzichtig en zorgvuldig gestreefd om een paar vragen al een wat ander gezicht te geven, bijvoorbeeld door een probleem te presenteren in een context, zoals dit jaar bij statistiek. In feite begon dat al in 1989 met de vijver die uit de tuin werd gegraven. Als je terugblikt, zie je dat contexten tot nu toe meer over ruimtemeetkunde (dozen, zwembaden, blikken, containers) en statistiek gaan dan over algebra. Herkenbaarheid, inleefbaarheid en functionaliteit zijn sleutelwoorden bij het zoeken naar en presenteren van contexten. De ontdekking dat we gemiddeld per persoon 13 broden per jaar weggooien is een sprekend voorbeeld.
Nadat de statistiek-opgave door de vaksectie vastgesteld was voor de hier besproken examens, zag men dat deze context ook bruikbaar was voor de examens volgens het nieuwe programma.

Verder over de open vragen

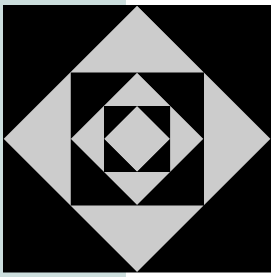
Kun je een C-kandidaat vragen of twee lijnen loodrecht op elkaar staan? In een goed examen zitten veel vragen die van reproduktieve aard zijn, dat wil zeggen behoorlijk verwant zijn met vragen die de kandidaat gewend is. Met die vragen kan de hij, als hij het onderwijs goed gevolgd heeft, behoorlijk wat punten verdienen. Daarnaast bevat een goed examen ook wat produktieve vragen, zoals de genoemde vraag. Door te controleren of de stelling van Pythagoras geldt, of eventueel met behulp van 'trapjes' -1/5 en 5/1, moet een betere leerling enkele punten kunnen scoren.
De vragen 23, 24 en 25 van D werden wel te eenvoudig gevonden, maar je moet zien wat er in totaal op tweedegraads gebied wordt gevraagd. Hierover zijn ook vier meerkeuzevragen gesteld en niet te vergeten de open vraag 29. Het is goed dat opgaven wat spreiden met betrekking tot de moeilijkheidsgraad.
In beide examens stond een tekening in het vragenboekje die bij nader inzien beter op de bijlage had gekund. Bij C was dat bij de al genoemde opgave over lijnen en bij D ging het om een viervlak (had dat beter ruimtefiguur of lichaam kunnen heten?). Kandidaten schrijven soms informatie bij zo'n figuur die relevant is voor de beoordelaar. We nemen de opmerking ter harte.
In vraag 27 van D kwam evenals in 1991 en 1992 een uitslag voor. Het betrof een doosje met een schuin aflopende bovenkant. Velen namen automatisch aan dat de bovenkant hetzelfde was als de onderkant. Toch konden zij nog 6 van de 9 punten halen.
Vraag 28 van D is een prima vraag over vectoren. Kandidaten kunnen laten zien of ze een vector kunnen halveren, verdubbelen, het tegengestelde nemen en of ze vectoren goed kunnen optellen. Men haalde 64% van de punten. De vraag had natuurlijk wat moeilijker mogen zijn. Maar het voordeel was dat de vraag weinig inleeftijd vroeg en snel te maken was. Te veel vragen aan de moeilijke kant leidt of tot een hoog percentage onvoldoenden of tot een cesuurverschuiving.
Vraag 29 van D is inderdaad abstract voor de kandidaten, maar het is een onderdeel van het examenprogramma en dient dus getoetst te worden. De opmerking dat dit beter in het meerkeuzedeel kan, spreken we tegen. Met tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden is dat in het algemeen heel problematisch. Ten eerste omdat je substitutie vanuit de alternatieven wilt voorkomen. Ten tweede omdat je het gros aan relevante fouten bij de alternatieven wilt onderbrengen. Zo is ooit de meerkeuzevraag uit 1987 'Los op: $x^2 + 5x - 24 \geq 0$' als open vraag voorgelegd aan 156 mavo-D kandidaten: er werden 46 *verschillende* antwoorden gegeven! Bij 'Los op: $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 8\frac{1}{2} < 4$' gaan er zelfs nog twee stappen aan vooraf, dus de fouten zijn echt niet adequaat voor te programmeren. Waarbij ook nog komt dat het niet redelijk is de uitwerking met 0 punten óf 2 punten te kwalificeren. Kortom, een prima open vraag waarbij de uitwerking stap voor stap beoordeeld kan worden.
In vraag 30 van D en 34 van C staan twee vragen onder één nummer. Het is inderdaad belangrijk om dat zo veel mogelijk te voorkomen. De formulering 'Bereken hoeveel kilogram groenafval wij in 1990 *meer*

Korrel

Vierkant

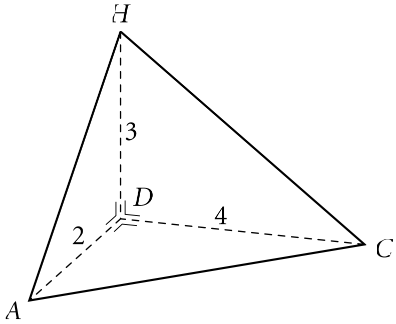
Aan één van onze universiteiten is mevrouw Zsófia Ruttkay werkzaam. Zij laat ons weten dat het Nederlandse wiskunde-onderwijs niet deugt. Dat is te veel oefenen met formules.
Zij geeft samen met Prof. Henk Barendregt leiding aan *Vierkant voor Wiskunde.* Het valt hen zeer te prijzen dat zij niet bij de pakken neerzitten.
Het Parool (11-8-'94) en *NRC-Handelsblad* (8-9-'94) berichtten over het wiskundekamp dat door Vierkant was georganiseerd. Daaraan deden 13 scholieren, allen jongens, mee. ‘Er moet nog een traditie worden opgebouwd’, veronderstelt Zsófia Ruttkay.
Er is meer dat door haar wordt verondersteld. ‘Op school is het antwoord belangrijk, maar hier op het wiskundekamp gaat het vooral om de manier waarop je iets bedenkt’, dat heeft zij, begrijpen wij uit NRC-Handelsblad, één van de 13 jongens ingepeperd.
In Het Parool maakt zij het nog bonter: ‘De wiskunde die in Nederland op school wordt gegeven, is niet geschikt om logisch te leren denken. Er is altijd een slim kind dat de oplossing weet en de rest krijgt geen tijd om zelf na te denken’, zegt mevrouw Ruttkay.
Dat zij niet de literatuur over het Nederlandse wiskunde-onderwijs heeft doorgenomen valt haar niet euvel te duiden. Ook kan men niet verwachten dat zij nauwkeurig weet wat er tijdens Nederlandse wiskundelessen gebeurt.
Het mag een raadsel heten waarom zij desondanks de media belaagt met een karikatuur van het Nederlandse wiskunde-onderwijs.
In Hongarije is het allemaal beter. Ik zal dat niet tegenspreken. Ook zal ik niet de voortreffelijkheid van wiskundekampen betwisten.
Maar de bewijsvoering van mevrouw Ruttkay lijkt mij wat mager. Ik ben benieuwd naar een verdere redengeving, en heb mij voorgenomen speciaal te letten op mogelijke cirkelredeneringen.

M. van Hoorn

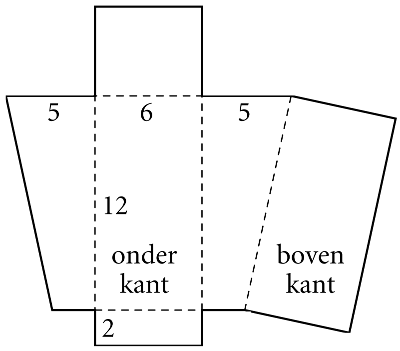


of *minder* hebben weggegooid dan in 1985’ zou een te groot beroep op taalvaardigheid doen. Bij splitsen van de vraag én onder twee nummers plaatsen, ontstaat het probleem van afhankelijkheid.

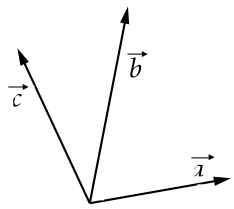
Vraag 26



Vraag 27

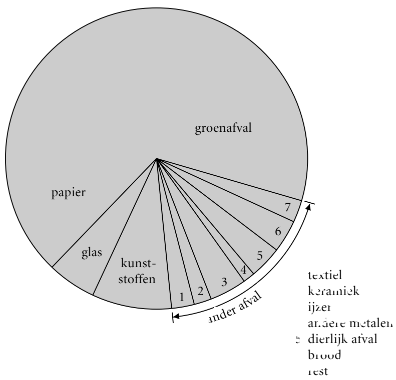


Vraag 28



Vragen 30, 31 en 32

Samenstelling huishoudelijk afval in 1990



Opgave 1

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow (x-3)^2 + 2$.
De grafiek van f heeft top T en snijdt de y-as in S.

1p 23 □ Geef de coördinaten van T.
2p 24 □ Bereken de coördinaten van S. Schrijf de berekening op.
2p 25 □ Teken de grafiek van f in het assenstelsel op de bijlage.

Opgave 2

Hiernaast is een viervlak $H.ACD$ getekend.
Alle hoeken bij D zijn 90°.
$AD = 2$, $CD = 4$ en $DH = 3$.

7p 26 □ Bereken $\angle HAC$ in graden nauwkeurig.
Schrijf de berekening op.

Opgave 3

Op de bijlage bij vraag 27 is de uitslag van een doosje getekend.
De onderkant is een rechthoek.
De maten zijn aangegeven in cm.

9p 27 □ Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel cm² de oppervlakte van het doosje is. Schrijf de berekening op.

Opgave 4

Op de bijlage bij vraag 28 zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ getekend.

5p 28 □ Teken in dezelfde figuur nauwkeurig de vector $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{c}$.
Uit de tekening moet blijken hoe je aan de gevraagde vector komt.

Opgave 5

6p 29 □ Los op: $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 8\frac{1}{2} < 4$. Schrijf de uitwerking op.

Opgave 6

Jaarlijks wordt onderzocht hoeveel huishoudelijk afval wij weggooien.
Hieronder zie je twee tabellen met gegevens over dat afval uit de jaren 1985 en 1990.

tabel 1 Huishoudelijk afval per inwoner (uitgedrukt in kilogrammen)

	1985	1990
aantal kg	342	410

tabel 2 Samenstelling van huishoudelijk afval (het gewicht is uitgedrukt in procenten van het totale gewicht)

	1985	1990
groenafval	50,5%	45,3%
papier	22,8%	26,4%
glas	7,2%	6,2%
kunststoffen	6,8%	7,9%
ander afval	12,7%	14,2%
	100 %	100 %

4p 30 □ In welk jaar hebben wij per inwoner meer kilogram groenafval weggegooid, in 1985 of in 1990? Bereken hoeveel kilogram meer dat was (afronden op een geheel getal). Schrijf de berekening op.

De samenstelling van het huishoudelijk afval in 1990 is op de bijlage in een cirkeldiagram weergegeven.

Het cirkeldiagram is nog niet af, want de sectoren groenafval en papier zijn nog niet getekend.

4p 31 □ Teken deze sectoren in het diagram. Leg uit hoe je aan je tekening komt.

De sector 'ander afval' is op de bijlage getekend met een onderverdeling.

6p 32 □ Meet de middelpuntshoek van de sector brood en bereken hoeveel broden wij per inwoner gemiddeld in 1990 hebben weggegooid. Neem hierbij aan dat een brood gemiddeld 800 gram weegt. Schrijf de berekening op.

Einde

tabel 1

	mavo/ vbo-D	mavo/ vbo-C
Aantal kandidaten in steekproef	2185	2696
Gemiddelde p-waarde identieke vragen	69,7	52,0
Gemiddelde p-waarde meerkeuzevragen	61,6	55,7
Gemiddelde p'-waarde open vragen	53,7	47,0
Gemiddelde p'-waarde totaal	57,5	51,2
Gemiddelde score meerkeuzevragen	27,1	24,5
Gemiddelde score open vragen	24,7	21,6
Gemiddelde score totaal (+ 10)	61,8	56,1
Gemiddelde score meisjes	59,8	53,6
Gemiddelde score jongens	63,1	58,0
Door Cevo vastgestelde cesuur	54/55	54/55
Gemiddeld cijfer	6,2	5,6
Percentages onvoldoendes	32	45
Betrouwbaarheid meerkeuzevragen	0,67	0,69
Betrouwbaarheid open vragen	0,67	0,69
Betrouwbaarheid totaal	0,78	0,80

tabel 2 *Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem*

Analyse vragen wiskunde-D mavo/vbo-populatie

			P- en A-waarden					
Vraag	**Sleutel**	**P**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1	C	85	9	4	85*	3	0	
2	A	72	72*	17	4	2	3	1
3	B	63	9	63*	2	22	2	2
4	E	36	10	13	12	12	36*	17
5	E	62	2	16	14	5	62*	
6	C	65	12	23	65*			
7	E	71	6	3	13	3	71*	3
8	C	58	9	20	58*	13		
9	B	71	3	71*	3	4	18	1
10	C	53	4	7	53*	36		
11	A	72	72*	11	2	1	3	11
12	C	87	4	3	87*	6		
13	B	59	20	59*	7	14		
14	A	23	23*	19	35	16	5	2
15	E	66	4	3	6	14	66*	7
16	D	66	3	8	18	66*	4	
17	B	62	12	62*	12	7	8	
18	B	76	4	76*	4	5	5	6
19	D	64	3	3	7	64*	23	
20	E	48	16	14	9	9	48*	4
21	B	39	25	39*	12	11	14	
22	E	58	2	4	4	23	58*	8

	Max. score	Gem. score	P'	Relatieve frequenties (in %) 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	1	0,81	81	19	81								
24	2	1,34	67	26	14	60							
25	2	1,49	75	22	7	71							
26	7	3,94	56	20	5	7	13	5	11	14	25		
27	9	4,08	45	17	5	7	10	10	14	20	10	3	4
28	5	3,19	64	18	6	9	18	7	43				
29	6	2,92	49	23	8	8	11	30	8	13			
30	4	2,64	66	18	8	7	25	42					
31	4	1,98	50	42	2	11	4	40					
32	6	2,29	38	40	3	21	3	10	5	19			

Aantal kandidaten: 2185
Gemiddelde score: 51,8
Standaarddeviatie: 14,7
Gemiddeld percentage goed: 57,5

tabel 3 *Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem*

Analyse vragen wiskunde-C mavo/vbo-populatie

			P- en A-waarden					
Vraag	**Sleutel**	**P**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1	C	72	15	10	72*	2	1	
2	F	66	4	3	3	5	19	66*
3	D	37	10	28	12	37*	14	
4	C	55	6	12	55*	10	10	6
5	D	52	19	7	5	52*	6	10
6	C	49	17	34	49*			
7	E	47	13	7	18	10	47*	6
8	B	34	12	34*	44	10		
9	C	72	10	7	72*	11		
10	A	52	52*	23	21	4		
11	A	55	55*	19	6	2	5	13
12	B	68	11	68*	12	9		
13	B	43	26	43*	11	20		
14	D	84	7	2	2	84*	5	
15	C	47	25	18	47*	1	9	
16	D	38	10	13	30	38*	8	
17	C	49	11	7	49*	17	8	8
18	B	64	7	64*	7	6	9	7
19	D	47	5	5	8	47*	34	
20	A	85	85*	7	6	3		
21	B	64	24	64*	11			
22	A	43	43*	44	6	7		

	Max. score	Gem. score	P'	Relatieve frequenties (in %) 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	2	0,76	38	61	2	37							
24	2	0,93	47	50	7	43							
25	3	1,66	55	33	9	17	41						
26	6	3,12	52	29	6	6	10	9	10	29			
27	3	2,50	83	10	9	3	79						
28	3	1,55	52	43	0	15	41						
29	4	1,12	28	44	24	17	7	9					
30	5	2,15	43	46	6	4	5	8	31				
31	2	0,49	24	70	11	19							
32	4	0,66	17	73	9	6	5	8					
33	3	2,12	71	22	3	17	58						
34	4	2,54	64	22	6	9	24	40					
35	5	2,00	40	49	2	12	4	3	30				

Aantal kandidaten: 2696
Gemiddelde score: 46,1
Standaarddeviatie: 14,9
Gemiddeld percentage goed: 52,1

Op vrijdag 9 december aanstaande wordt inmiddels voor de vijfde keer de voorronde van de Wiskunde A-lympiade gehouden. Dit artikel is vooral bedoeld docenten over te halen leerlingen uit 5 en 6 vwo mee te laten doen aan deze voorronde. Daartoe laat de auteur een aantal zaken rond de Wiskunde A-lympiade de revue passeren.

Wiskunde A-lympiade

Kees Hoogland

Wat is de wiskunde A-lympiade?

Aan de voorronde van de Wiskunde A-lympiade kunnen alle leerlingen uit 5 en 6 vwo, het liefst met wiskunde A in het pakket, meedoen. Het is de bedoeling dat de leerlingen in groepjes van vier zich een dag lang buigen over een realistisch probleem.
Om negen uur 's ochtends wordt de opdracht verstrekt en van de leerlingen wordt verwacht dat ze om vier uur 's middags een goed vormgegeven werkstuk inleveren waarin een oplossing voor het gestelde probleem wordt gepresenteerd.
Aan het eind van het artikel vindt u een voorbeeld van zo'n probleem.
De opgave wordt samengesteld door de commissie Wiskunde A-lympiade [1] en van te voren aan de deelnemende scholen opgestuurd. Per school mogen de twee beste werkstukken ingestuurd worden. Deze dingen mee naar één van de twaalf plaatsen in de landelijke finale. In de landelijke finale worden de leerlingen geconfronteerd met een ander, nog uitgebreider probleem. Daaraan mogen ze gedurende twee dagen werken in een riante bungalow op de Veluwe.

Waarom eigenlijk?

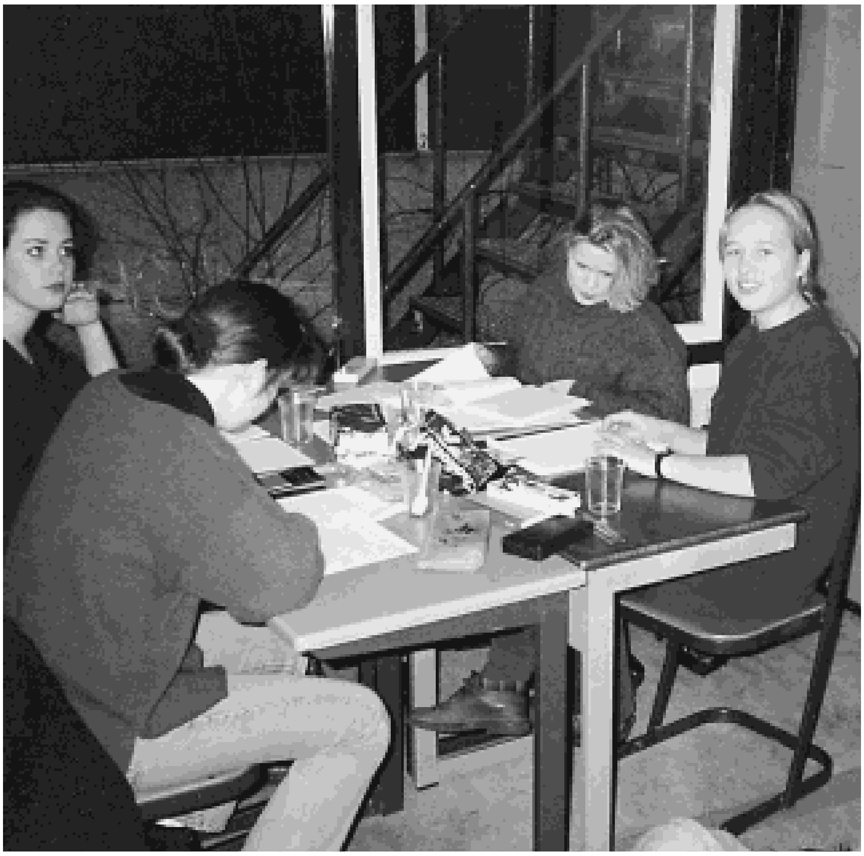
Bij de invoering van wiskunde A op het vwo is eigenlijk voor het eerst binnen het wiskundeonderwijs sprake van een poging expliciet te werken aan meer vaardigheden dan de algebraïsche en algoritmische vaardigheden die veelal centraal staan in discussies rond wiskundeonderwijs. Gedacht moet worden aan vaardigheden als bijvoorbeeld probleem oplossend vermogen, leesvaardigheid, kritisch beschouwen van modellen en mathematiseren. In de loop der jaren blijkt met name ook in de examens dat een vrij gering beroep gedaan wordt op dit soort vaardigheden. Verder denkend over vaardigheden komen schrijfvaardigheid, onderzoek doen, standpunten verwoorden, samenwerken en een werkplanning maken al vrijwel geheel niet aan de orde, noch in de toetsing, noch in de klassepraktijk.
Toch is in allerlei ontwikkelingen rond het onderwijs een sterk verhevigde aandacht te zien voor deze vaardigheden. In het besluit kerndoelen basisvorming staan de meeste van bovenstaande vaardigheden expliciet genoemd. In de onderbouw zien we dan ook het ontstaan van Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten (GWA's), om op die manier ook naast de reguliere leerstof te werken aan dit type vaardigheden.
Het is natuurlijk niet verbazingwekkend dat ook in de plannen voor de Tweede Fase (profielen, bovenbouw havo en vwo) wederom veel aandacht is voor het werken aan vaardigheden, naast en geïntegreerd met werken aan kennis en inzicht.
De commissie wiskunde A-lympiade heeft de afgelopen jaren getracht in de vorm van een wiskunde A-lympiade bij leerlingen, zij het slechts eenmaal per jaar, een beroep te doen op een breed scala van vaardigheden die ook voor vervolgopleidingen en latere beroepspraktijk voorwaar toch wel waardevol genoemd kunnen worden. De stijgende populariteit van de wiskunde A-lympiade doet vermoeden dat ook op scholen een toenemende vraag ontstaat naar het werken aan kennis als gereedschap met de daarbij horende vaardigheden dan louter aan kennis als doel.

De scholen

Het aantal deelnemende scholen stijgt gestaag. Vorig jaar deden bijna 100 scholen mee, waarbij in totaal meer dan 1000 leerlingen werkten aan de jaarlijkse voorrondeopdracht. De meeste scholen tot nu toe laten op basis van vrijwilligheid een aantal teams meedoen. Inmiddels ontstaat echter ook een tendens dat scholen deze manier van werken aan wiskunde A zo belangrijk vinden, dat ze alle leerlingen met wiskunde A verplicht laten meedoen en het resultaat waarderen met een cijfer. [2]
Natuurlijk doen scholen niet alleen mee omdat het zo belangrijk is. De leerlingen blijken het ook ontzettend leuk te vinden om op deze manier een dag te werken. De combinatie van het proces van overleggen en samenwerken en het toewerken naar een concreet produkt leidt tot soms bijna ongeloofwaardige werklust en concentratievermogen.
Het blijkt dat de scholen die eenmaal meedoen, vrijwel allemaal het volgende jaar weer meedoen en dan meestal met meerdere teams.

De leerlingen

Op het Jac. P. Thijsse College in Castricum doen alweer enkele jaren alle leerlingen uit 5 en 6 vwo mee aan de wiskunde A-lympiade. De allereerste keer was er bij veel leerlingen een behoorlijke dosis scepsis. Vooral de onbekendheid van het op deze manier een dag werken was daar debet aan. Toch doorgezet, goed georganiseerd en al tijdens de dag waren opmerkelijke fenomenen zichtbaar: pauzes worden overgeslagen, het lopen door de gangen voor materiaal gebeurt met gezwinde spoed, groepsgenoten worden opgejut, stress slaat toe om half vier, om vier uur is voldoening te lezen op toch wat vermoeid ogende gezichten. De jaren daarna vormden de 6 vwo-leerlingen, die immers al een keer meegedaan hadden, de beste stemmingmakers voor het gebeuren. Voor hen is het na één jaar een activiteit geworden waar je naar toe leeft en 'voor gaat'. Mooiere ervaringen heb je zelden in het onderwijs.

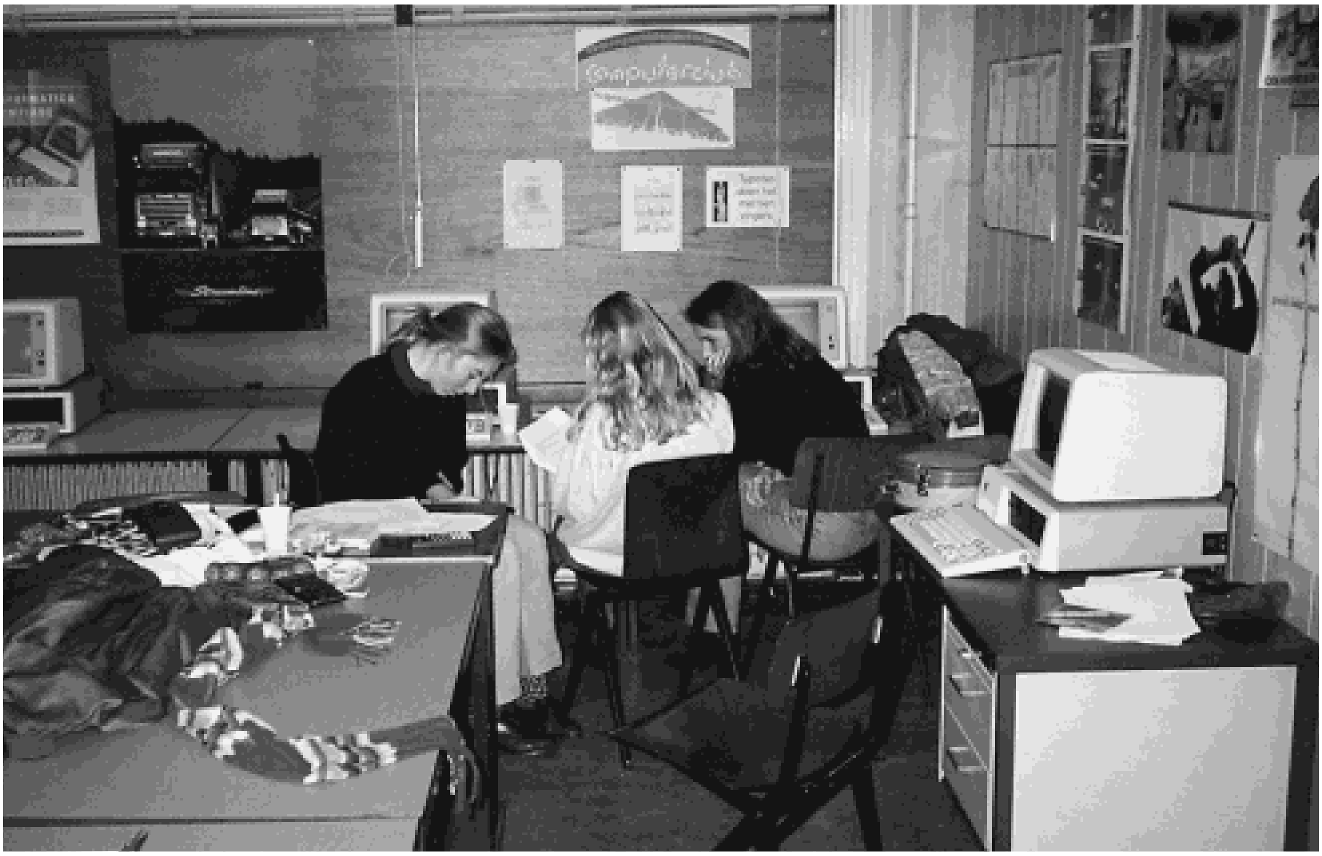


Wiskunde A en de tweede fase

Op dit moment heeft meer dan de helft van de leerlingen in de bovenbouw Wiskunde A in het pakket. Het is daarmee in ieder geval de meest beoefende tak van het wiskundeonderwijs. In de toekomstige Tweede Fase zal de wiskunde zich in de meeste profielen ongetwijfeld verder ontwikkelen in de richting van het geïntegreerd werken aan vaardigheden, kennis en inzicht. Een vorm van wiskundeonderwijs zoals de Wiskunde A-lympiade zou, waarschijnlijk wel in iets andere vorm, best onderdeel kunnen gaan uitmaken van het reguliere programma.
Het nu meedoen aan een wiskunde A-lympiade kan een aardige voorbereiding zijn voor het werken aan wiskunde in de toekomst.
Een reden temeer om deelname te overwegen.

Toekomst

Een ontwikkeling op een heel andere terrein zou kunnen zijn dat er een internationale Wiskunde A-lympiade ontstaat. In meerdere landen bestaan wiskundewedstrijden, ook wedstrijden waar gewerkt wordt aan realistische problemen. De deelnemende leerlingen aan de finale van vorig jaar antwoordden desgevraagd dat een Engelstalige opgave naar hun idee geen onoverkomelijk probleem zou zijn. Uitwerken in het Engels was misschien nog wat veel gevraagd. Maar wie weet!



Tot slot

Dit artikel bereikt u misschien pas vlak voor de voorronde 1994. Acht u het te kort dag om de Wiskunde A-lympiade nog dit jaar uit te voeren op uw school, dan heeft u in ieder geval genoeg tijd om na te denken over een integrale uitvoering volgend jaar. Daarvoor kan dan ook geput worden uit een boekje: 'De voorronde op school' [2] en een binnenkort te verschijnen boek over vijf jaar Wiskunde A-lympiade.

Noten

1 De Wiskunde A-lympiade wordt georganiseerd door het Freudenthal instituut onder auspiciën van de Nederlands Onderwijs Commissie Wiskunde. De commissie Wiskunde A-lympiade bestaat op dit moment uit F. van der Blij, D. de Haan, F. Evers, A. Hol, K. Hoogland, C. Lagerwaard, J. de Lange, J. Maassen, F. Raeven, A. Roodhardt, J. Smit, J. van der Wal en M. Wit.

2 Wilt u meer informatie over het integraal organiseren van een voorronde op school dan kunt u bij het Freudenthal instituut (030-611611) het boekje 'De voorronde op school' aanvragen.



Een A-lympiade-opgave

Het bevoorraden van filialen

Probleemschets

Een distributiecentrum van een supermarktketen bevoorraadt een aantal filialen enkele malen per week. Een filiaal moet de bestelling voor een bepaalde dag al 2 dagen eerder doorgeven. De bestelling wordt dan door de orderverzamelaars op pallets geplaatst en klaargemaakt voor transport.
Voor het transport maakt men gebruik van een aantal transportbedrijven. De middag van te voren wordt er een aantal vrachtwagens besteld. Er zijn vrachtwagens met een capaciteit van 20, van 28 en van 40 pallets. Bepaald wordt dan ook welke filialen tot een rit gecombineerd worden, en hoeveel ritten een vrachtwagen op een dag maakt.

Gegevens

We beschikken over een prijzentabel waarin is af te lezen wat het huren van een bepaald type vrachtwagen kost. De huurprijs is opgebouwd uit drie delen, een vast bedrag, een bedrag per uur, en een bedrag per afgelegde kilometer. Per dag kan een vrachtwagen gedurende ongeveer 8 uur ingezet worden.

Type vrachtwagen	Aantal pallets	Kosten in guldens		
		per dag	per uur	per km
1	20	160	50	0.45
2	28	200	50	0.50
3	40	240	50	0.55

Tabel 1 Prijzentabel in guldens

Het huren van een vrachtauto van type 1 die gedurende 6 uur gebruikt wordt en waarmee 400 km gereden wordt kost dus $160 + 6 \times 50 + 400 \times 0{,}45 = 640$ gulden.

Het distributiecentrum ligt in Maarheeze op 1 km van de oprit naar de A2.
Op een bepaalde maandag moeten 25 filialen bevoorraad worden. De filialen en de aantallen af te leveren pallets per filiaal staan in Tabel 2.

Nr. filiaal	Plaats	Aantal pallets
1	Bergen op Zoom	10
2	Boxtel	7
3	Breda	20
4	Den Bosch	18
5	Deurne	12
6	Dongen	10
7	Echt	9
8	Eindhoven	21
9	Geleen	14
10	Heerlen	19
11	Helmond	12
12	Maastricht	18
13	Oosterhout	15
14	Oss	17
15	Roermond	14
16	Rozendaal	11
17	Sittard	18
18	Tilburg	19
19	Uden	14
20	Valkenswaard	11
21	Veghel	9
22	Venlo	16
23	Venray	13
24	Waalwijk	15
25	Weert	14

Tabel 2 Aantal pallets per filiaal

Bij het rijden op snelwegen bedraagt de gemiddelde snelheid 80 km per uur, op binnenwegen 60 km per uur, en in plaatsen en steden 20 km per uur. Deze snelheden gelden voor alle typen vrachtwagens, voor beide rijrichtingen en hangen niet af van de belading.
De binnen de gemeente af te leggen afstand naar het filiaal kan gesteld worden op 2 km met als uitzondering de plaatsen Breda, Eindhoven, Heerlen, Maastricht, Tilburg en Venlo waar deze afstand ongeveer 4 km is.
Het laden van de wagens kost gemiddeld 10 minuten plus 1 minuut per pallet. Het lossen kost ongeveer 10 minuten plus 2 minuten per pallet.

Opdracht

a Op de Shell wegenkaart kun je zien wat de hoofdwegen en wat de binnenwegen zijn. Bepaal met behulp van deze kaart welke verbindingen je toelaat en wat deze in kilometers en in tijd kosten.

b Bepaal een goede oplossing voor het bevoorradingsprobleem van deze maandag.
Geef vooral aan hoe je door gericht te zoeken tot deze oplossing gekomen bent. Het gaat er niet om dat je de goedkoopste oplossing vindt. Veel belangrijker is dat je een verstandig zoekproces ontwikkelt waarmee je met de hand (dus zonder computer) een acceptabele oplossing kunt vinden.

Opmerking

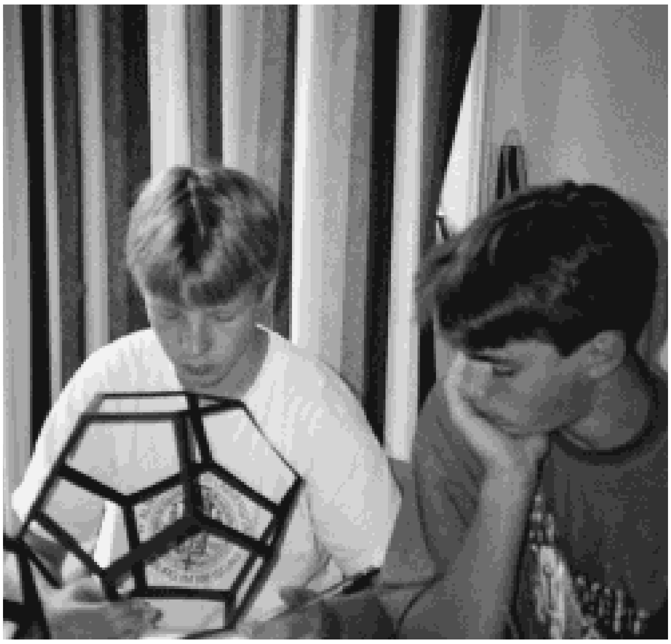
Dit type van probleem staat bekend als moeilijk. Bij een wat groter aantal filialen neemt het aantal mogelijke ritten zo sterk toe dat het zelfs met hulp van de computer niet meer mogelijk is het goedkoopste schema te vinden. In de praktijk wordt daarom vooral gezocht naar algoritmen die vrij snel een goede oplossing genereren.

VIERKANT zomerkamp 1994

Zsófia Ruttkay

In de laatste week van augustus is er een wiskundekamp georganiseerd door Vierkant voor twaalf- tot zestienjarigen. Dit kamp was de eerste in zijn soort in Nederland: het was georganiseerd voor 'gewone' Nederlandse tieners (niet degenen die al blijk gegeven hebben over een bijzonder wiskundetalent te beschikken), met de bedoeling ze de uitdaging en de schoonheid te laten ervaren van wiskundig denken en problemen oplossen.

Het idee voor zo'n kamp was al ontstaan in 1992 toen ik mij realiseerde dat er bijna geen buitenschoolse activiteiten zijn op wiskundegebied voor middelbare scholieren, en, meer algemeen, dat wiskunde zo'n slechte naam heeft. Dit contrasteert heel sterk met de traditie in Hongarije. Beide verschijnselen zijn niet onafhankelijk. In de laatste jaren heb ik vaak het argument gehoord: 'Een geslaagd wiskundekamp is een onbereikbaar doel, omdat kinderen niet van wiskunde houden'. Soms werd daarbij verwezen naar de gerichtheid op vermaak van de Nederlandse jeugd of de oriëntatie op de middelmaat in de Nederlandse samenleving. Dankzij de steun en actieve participatie van mensen die het ontbreken van de juiste stimulans zien als een van de redenen voor de impopulariteit van wiskunde, zijn prof. Barendregt en ik erin geslaagd een actie te starten die kinderen de mogelijkheid biedt tot buitenschoolse wiskunde-activiteiten. De actie 'Vierkant voor Wiskunde' bestaat sinds begin 1994, het kamp



is een van de eerste resultaten.
Er waren dertien deelnemers (allemaal jongens) aan het kamp, geassisteerd door zeven wiskundigen - universitaire studenten (verschillende van hen waren voormalige olympiade-deelnemers) en docenten. Hoewel iedere middelbare school met havo-vwo een poster en aanmeldingsformulieren voor het kamp heeft ontvangen, hebben de meeste kinderen over het kamp gehoord bij een speciale gelegenheid (wetenschapsdag, Vierkant wiskundeclub) of via een speciale organisatie (Pharos). Er waren dus meerdere kinderen op het kamp met duidelijk gebleken aanleg naast gewone kinderen. Dit bleek geen enkel probleeem te zijn, dankzij de verhoudingsgewijs vele en geduldige begeleiders, die in staat bleken de programma's al doende aan te passen aan de individuele groepjes.

Er waren verschillende wiskundeprogramma's zorgvuldig samengesteld volgens een doordacht schema, ca. zes uur per dag. In navolging van Gy. Polya, die stelde dat je het beste wiskunde leert door uitdagende problemen op te lossen, was er iedere dag een 'probleem oplos-sessie'. De kinderen moesten een oplossing zien te vinden door samen te werken in groepjes van twee tot vijf personen. De problemen waren zo gekozen dat ze konden worden opgelost door consequent en logisch denken (logische puzzels, strategische spelen), door een goede probleemrepresentatie te vinden of door een invariant van een procedure te ontdekken (kleuring, pariteit). Soms moesten nieuwe oplosmethoden ontdekt worden

(bv. volledige inductie). In alle gevallen moesten de kinderen zelf worstelen met de materie en zelfstandig de oplossing bereiken. Kwamen ze vast te zitten, dan vergemakkelijkten de begeleiders het pad naar de oplossing door een eenvoudiger versie van hetzelfde probleem aan te bieden, door te wijzen op een analogie of door doorvragen het redeneren weer in de goede richting te oriënteren. Met de slimste kinderen was hun rol meer het analyseren van de opgeloste problemen en het genereren van een moeilijker variant.
’s Middags werden onderzoeksprojecten uitgevoerd van twee à drie uur. In elk project maakten de kinderen kennis met een wiskundegebied: grafen, polyhedra, fractals, tegelpatronen. Na het bekijken van voorbeelden werden wiskundeconcepten geabstraheerd (bv. reguliere polyhedra), veronderstellingen geformuleerd en bewezen (bv. de formule van Euler). Soms gebruikten ze ook knutselmateriaal of computers om een gebied te onderzoeken.

Er waren twee klassieke lezingen door universitaire docenten, een over hoe computers strategische spelen spelen, de andere over de geometrie van de voetbal. Er was ook een Kangoeroe-competitie van anderhalf uur.

Naast dit verplichte programma was er nog een vrijwillig programma. Op de tweede ochtend werden er drie problemen gegeven: het vinden van een winnende strategie voor een NIM-spel; het vinden van de optimale schikking van verschillende stukken op een schaakbord, en het creëren van een wiskundig kunstwerk. De oplossingen werden vergeleken op de laatste dag. Het was een echte verrassing dat de optimale oplossing van het schaakprobleem, het optimum – een stelling in het proefschrift van de auteur van het probleem – werd gevonden door een tweetal op het kamp. Het was bijzonder leuk om te zien hoe bezig de kinderen waren in hun vrije tijd (soms tot laat op de avond) met deze problemen.
Het was ook opmerkelijk hoe velen spontaan een paar vormden om hun inspanningen te combineren in plaats van individueel te slagen of te falen. Voor de vrije tijd was er ook een kleine bibliotheek beschikbaar en enkele jaargangen van Pythagoras.

De niet-wiskundige activiteiten omvatten ping-pong en voetballen, een kano-excursie, avondspelen en een toneelvoorstelling. Bij de laatste twee was wiskunde wel present:



strategische spelen waren zeer populair, en de acteur Paul Clark suggereerde in zijn show een efficiëntere notatie voor getallen.

Het was duidelijk gedurende het kamp dat de kinderen zonder uitzondering zeer veel plezier hadden in de wiskundeactiviteiten, in het bijzonder het probleem oplossen. Wiskunde als een gezamelijke activiteit hielp de vrij grote kloof te overbruggen tussen leeftijd en sociale achtergrond. Het was eens opmerkelijk hoe de stereotype reacties (de begeleiders vragen om bevestiging van een opkomend idee in plaats van het te testen, of iets bewijzen door een paar concrete voorbeelden) gaandeweg werden vervangen door eigen kritisch denkwerk. Hoewel het wiskundig inzicht van de kinderen werd verrijkt, is het werkelijke succes van het kamp gelegen in het feit dat ze de smaak te pakken hebben gekregen van het plezier en de schoonheid van wiskundig denken.
Daar alle deelnemers graag terug willen komen zal er volgend jaar een vervolg zijn. Wij verwachten dan een groter aantal kinderen.

Tenslotte wil ik al diegenen bedanken zonder wie het kamp niet mogelijk zou zijn geweest.
De begeleiders: V. Allis, H. Brandsma, E. Hamburger, E. Lefeber, W. Oudshoorn, M. Pijls, S. van Rijnswou en de sponsors:
Amsterdams Lyceum,
Apple Computers Benelux B.V.,
CWI Amsterdam,
Katholieke Universiteit Nijmegen,
Shell Nederland B.V.,
Technische Universiteit Delft,
Vrije Universiteit Amsterdam.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Inhoud

Van de bestuurstafel

Derde-Wereldfonds
Op de jaarvergadering van november 1993 is op initiatief van een aantal leden besloten een fonds in het leven te roepen om het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld te ondersteunen. De werkgroep die op de besteding van het ingezamelde geld zal toezien is inmiddels opgericht en bestaat uit H. Wisbrun, J. Derks, L. van Dam-Schuringa en M. Zonneveld. Namens het bestuur neemt Ruud Jongeling aan de werkgroep deel.

Het doel van het fonds is tweeledig: enerzijds blijkt onder andere uit reacties van docenten die terugkomen uit een Derde-Wereldland dat er daar zeker behoefte is aan enige tastbare praktische ondersteuning, anderzijds kunnen collega's in Nederland op deze wijze geïnformeerd worden over het wiskundeonderwijs in andere landen.

De werkgroep hield kort geleden haar eerste vergadering, waarin gesproken is over de voorwaarden waaraan een project moet voldoen om voor financiering in aanmerking te komen. Er is besloten de leden van de NVvW in het buitenland aan te schrijven om hen in de gelegenheid te stellen een project voor te dragen. De werkgroep ziet het daarnaast ook uitdrukkelijk als haar taak om de leden te informeren over het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld. Via artikelen in Euclides, of op andere wijze.

Inmiddels heeft iedereen op vrijwillige basis naast de contributie een financiële bijdrage kunnen leveren aan het fonds. Dat is op ruime schaal gebeurd, zodat we dit jaar een opbrengst van ongeveer *ƒ* 7500,– zullen hebben. Zodra er iets bekend is over de besteding van dit geld zullen we u in Euclides hiervan op de hoogte stellen.

Vademecum
Vorig jaar is de herziene uitgave van het vademecum verschenen en gratis toegestuurd aan alle leden. Het vademecum is een rijke bron van informatie over examenprogramma's, regelingen, nuttige adressen. Nieuwe leden krijgen het uiteraard ook gratis toegestuurd, maar anderen kunnen het bestellen bij de ledenadministratie; het boek kost dan een tientje, exclusief portokosten.

Tweede Fase
Het bestuur heeft in een brief aan de Stuurgroep haar ernstige bezorgdheid uitgesproken over een aantal zaken in de nieuwe voorstellen. Hierover wordt u later in dit blad uitgebreider ingelicht.

Regionale bijeenkomsten
De voorbereidingen zijn in volle gang. Let op de data (zie bladzijde 94)! Houd een middag vrij.

Marian Kollenveld

Boekbespreking

Wiskundeonderwijs in de basisvorming

Nederland doet alweer ruim een jaar aan basisvorming, en de eerste ervaringen van docenten lijken over het algemeen niet negatief te zijn. De veranderingen bij sommige vakken zijn echter ingrijpend; docenten investeren veel tijd en energie om hun lessen optimaal te laten verlopen. Dat is zeker ook het geval voor wiskunde. Een 'ruggesteuntje' kan dan goed van pas komen, en dat is ook hetgeen Bram Lagerwerf met zijn boek 'Wiskundeonderwijs in de basisvorming' beoogd heeft. Het hierna volgende artikel probeert een beeld van deze publicatie te schetsen.

Veranderingen
De drie belangrijkste onderwijsinhoudelijke karakteristieken van de basisvorming worden in het jargon onder de afkorting TVS samengevat:
Toepassing-Vaardigheid-Samenhang.

Ook binnen het leerplan Wiskunde 12-16 vinden we deze drie elementen terug:
De *toepassingsgerichtheid* komen we tegen in de stellingname dat de wiskunde voor deze doelgroep '12-16' *gebruiks*wiskunde moet zijn. Met realistische contexten wordt de toepasbaarheid en herkenbaarheid van de leerstof voor de leerlingen vergroot, en ook 'leren door doen' als middel van kennisverwerving speelt in W12-16 een grote rol.
Vaardigheden speelden in het wiskunde-onderwijs uiteraard altijd al een grote rol, meer dan bijvoorbeeld in een vak als geschiedenis. Volgens de filosofie van de basisvorming moet nu echter ook gestreefd worden naar het bereiken van algemene vaardigheidsdoelen zoals 'onderzoekje verrichten' en 'standpunt verwoorden'. Daarnaast wordt de aandacht voor studievaardigheden groter. Bovendien vindt bij wiskunde een accentverschuiving plaats van algoritmische, technische vaardigheden naar probleemanalyse en heuristische methoden. Tenslotte verwijst de S van TVS naar de grotere aandacht voor het aanbrengen van *samenhang* tussen de verschillende schoolvakken onderling, maar ook tussen vaklessen en leerlingbegeleiding. Bij wiskunde ligt het aspect van samenhang onder andere in het streven de wiskunde-leerstof minder in geïsoleerde stukken op te splitsen maar bre- ▼

Rectificatie

In Euclides 70-1 staat op de bladzijden 29 t/m 31 een verslag van de op 19 maart 1994 gehouden studiedag van de werkgroepen *Vrouwen en Wiskunde* en *Vrouwen en Natuurwetenschappen.* In dit verslag zijn enkele onjuistheden blijven staan. Deze onjuistheden betreffen de inleiding die Truus Dekker op de studiedag heeft gehouden. Zo is er een commissie ingesteld, onder andere bestaande uit leden van de Cevo, die over de inhoud van de opgaven voor de basisvormingstoetsen adviseert aan het Cito. Deze commissie heeft niets te maken met het beoordelen van de resultaten van de leerlingen.
Verder zijn er bij het maken van de opgaven geen *vrouwelijke* docenten betrokken. Dat is iets anders dan, zoals in het artikel staat, geen docenten. Voor de in het artikel voorkomende onjuistheden bieden wij onze lezers, en vooral Truus Dekker, onze verontschuldigingen aan.
Wij zullen in de loop van deze jaargang nader berichten over de toetsing van de basisvorming, en dan naar wij hopen geheel correct.

De redactie

▼ der en meer probleemgeoriënteerd aan te bieden. Samenhang wordt verder aangebracht doordat leerlingen de link moeten leren leggen tussen vakkennis en de wereld om zich heen. Verder kunnen in dit verband de Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten genoemd worden.

Handreiking

Nieuwe doelen, nieuwe boeken - werkt dat? En *hoe* werkt dat dan? Gaan we in onze lessen op de oude voet door met de nieuwe sommetjes? De verleiding is groot om een ‘beproefde’ werkwijze te blijven volgen, maar… Misschien was onze aanpak adequaat in de ‘oude’ situatie - is ze ook effectief voor de nieuwe doelen?

Een praktische handreiking bij de vernieuwingen kan goed van pas komen. Daarvoor komt wat mij betreft zeker in aanmerking de onlangs verschenen publicatie ‘*Wiskundeonderwijs in de basisvorming*’[1] van Bram Lagerwerf, met als ondertitel ‘een didactische ruggesteun voor wiskundedocenten’. Lagerwerf heeft het boek geschreven ‘...voor wiskundeleraren en wiskundeleraressen, en voor hen die dat willen worden’, bedoeld als ‘… bron van ideeën voor wie zijn of haar aanpak wil vernieuwen. Het geeft een theoretisch kader voor de ontwikkelingen in de wiskundedidactiek.’ Gedeelten uit het boek heeft Lagerwerf eerder in een iets andere vorm gepubliceerd, in de Euclides-jaargangen 92/93 en 93/94. Dat gebeurde onder de overkoepelende titel ‘Ontwikkelingen in de didactiek’, een serie die helaas voortijdig afgebroken werd[2].

‘Wiskundeonderwijs in de basisvorming’ is onderverdeeld in drieën. Deel 1 gaat over ‘de bouwstenen van wiskunde’: getallen, ruimten, vlakken, lijnen en punten, over schematisering en over contextgebruik. Maar in feite gebruikt Lagerwerf dit deel om de onderliggende niveautheorie voor te bereiden.

In deel 2 komt die theorie expliciet aan de orde en wordt vervolgens gebruikt om diverse ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs te bespreken, zoals samenwerken, zelfstandigheid, een onderzoekende houding.

Deel 3 behandelt tenslotte een aantal losstaande onderwerpen waaronder het ivbo, allochtone leerlingen, meisjes en wiskunde, differentiatie, werken in de wiskundesectie, en lesvoorbereiding.

De niveautheorie

Uitgangspunt én (deel-)onderwerp van Lagerwerfs publicatie is de niveautheorie. Deze is gebaseerd op het werk van de Van Hieles en verder uitgewerkt door Lagerwerf en Korthagen[3]. Zelf geven de laatste twee auteurs aan dat in hun uitwerking verbanden gelegd zijn tussen de cognitieve en affectieve kanten van het leerproces en dat gebruik is gemaakt van nieuwere theoretische inzichten en stromingen (zoals het constructivisme).

De niveautheorie onderscheidt drie niveaus, drie fasen in het leerproces: *beeldvorming, schematisering en theorievorming.*

- De eerste fase is de *beeldvorming.* Een leerling vormt zich vanuit eigen ervaringen, vanuit ‘VOOR-beelden’, een beeld van een begrip of een regel. Via alledaagse beelden ontstaat op die manier een wiskundig beeld, vanwaaruit automatische reacties mogelijk worden. De taal speelt daarbij een geringe rol; de leerling zal zich in deze fase hoogstens bedienen van actietaal. Lagerwerf illustreert de fase van beeldvorming aan de hand van het begrip ‘rechthoek’: Aanvankelijk zien jonge kinderen alleen de verschillen tussen allerlei rechthoekige dingen zoals deuren en ramen, op een gegeven moment vallen ook de overeenkomsten op. Het beeld wordt gevormd. Als je dan vraagt wat een rechthoek eigenlijk is, zal het kind veelal met de handen een soort con- ▼

Mededeling

Wintersymposium

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal in 1995 plaatsvinden op 7 januari in het *Johan van Oldenbarneveldt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort.*

Het symposium is in de eerste plaats bedoeld voor leraren, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.

Het symposium is dit keer gewijd aan de kansrekening.

Programma

9.30-10.00:
Ontvangst met koffie

10.00-11.00:
Kansen in het actuariaat
prof. dr. H. Wolthuis

11.00-11.15:
Pauze, met koffie

11.15-12.15:
Markov ketens
prof. dr. C.L. Scheffer

12.15-13.30:
Pauze, waarin men kan deelnemen aan een gezamenlijke lunch

13.30-14.30:
Het vergelijken van behendigheid in spelen met een kanselement
prof. dr. B.B. van der Genugten

Deelname is gratis. Wie wil meedoen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht *voor 31 december 1994 f* 17,50 over te maken op gironummer 3391318 van R. Bosch, Heiakker 16 in Prinsenbeek. Wie in aanmerking wil komen voor een certificaat vermeldt bij betaling: *Certificaat.* Voor inlichtingen kunt u bellen naar 076-273184 (overdag) of 076-419757 (’s avonds).

structievoorschrift geven (actietaal). Maar als er geen beeldvorming van het begrip rechthoek plaatsgevonden zou hebben, heeft het geven van een definitie (vóóraf) geen enkele zin. Definities hebben pas zin als de beeldvorming achter de rug is.

- Als die eerste fase doorlopen is, kan 'het kale beeld ingevuld worden'; het geleidelijk voortgaande proces van (progressief) *schematiseren* kan beginnen. Details en onderlinge verbanden worden expliciet gemaakt, ook in woorden. Steeds verder verkort, steeds abstracter. Bij de rechthoek valt te denken aan het uiteindelijk kunnen vaststellen en verwoorden van feiten en eigenschappen, eventueel met gebruikmaking van symbolen en schematische plaatjes.
Lagerwerf waarschuwt voor te snelle, onvolledige fasen van beeldvorming en schematisering - iets waar velen van ons zich tijdens de les onder een gevoel van tijdsdruk nogal eens aan 'schuldig' maken.

- Sommige leerlingen komen ook toe aan *theorievorming*. Dat gebeurt vanuit de behoefte de gevonden eigenschappen te *verklaren*; de schema's worden logisch geordend. Uiteindelijk ontstaat door redeneren (als-dan) een stelsel van axioma's, definities en stellingen. Beelden zijn op dit niveau niet meer nodig; de formele vaktaal heeft de overhand.

Concreet
Misschien suggereert het bovenstaande dat Lagerwerf een theoretisch-georiënteerd werkje geschreven heeft, nauwelijks bruikbaar voor diegenen die dagelijks met de doorsnee-gang-van-zaken op een school te doen hebben. Dat is geenszins het geval. Het boek staat vol met concrete, praktische voorbeelden - soms als illustratie bij zijn theorie, meestal als onderwerp op zich.

Een losse greep:
- Bij het vermenigvuldigen van tweetermen fungeert in sommige schoolboeken de 'papegaaiebek' als *werkvoorbeeld*. Je kunt er alleen aan zien *hoe* het moet; het is het resultaat van een voortgeschreden schematisering. Het oppervlaktevoorbeeld is echter een *denkvoorbeeld*: als dit in het geheugen van de leerling aanwezig blijft, kan hij/zij de werkwijze bij de vermenigvuldiging blijven reconstrueren, ook als de 'truc' vergeten is.
- In het nieuwe leerplan is veel aandacht voor *open* problemen. Dat betekent ook dat leerlingen aangemoedigd moeten worden hun eigen werkwijzen te kiezen en te ontwikkelen, en tegelijkertijd ook van elkáár te leren. Hoe hanteer je dat tijdens je lessen? Lagerwerf gaat er concreet op in, en zet hier en daar de lezer gericht aan het denken.
- *Groepswerk* is natuurlijk niet 'bedacht voor de basisvorming'. Er zijn allerlei situaties waarbij groepswerk een prima middel is om je doel te bereiken. De praktijk leert dat veel leraren dan toch tegen praktische problemen aanlopen en er daarom van afzien. Het boek geeft tips.
- Het gebruik van *contexten* in het wiskundeonderwijs is nieuw voor diegenen die nog geen ervaring hadden met wiskunde A. Lagerwerf schrijft er uitgebreid over; hij geeft ondermeer vijf stappen om een wiskundig schema te laten opbouwen uit een concrete probleemsituatie. Verder noemt hij een aantal vaardigheden die wiskundedocenten zich hiervoor zouden moeten eigen maken:
- minder voordoen;
- gebruik maken van wat de leerling al kan;
- de wiskundige kern uitpakken;
- 'liefdevol verwaarlozen' (over hulp geven);
- uitdagen;
- houvast bieden;
- zorgen voor veiligheid; aardig zijn en eisen stellen.

Mededeling

Wijziging van de Regeling examenprogramma wiskunde A vwo (Staatsexamen)

De toetsing van het toepassen van de computer bij het onderdeel automatische gegevensverwerking (nieuwe variant) is opgeschort *tot en met* het examenjaar 1996. Dat betekent, dat in de examenjaren 1995 en 1996 de automatische gegevensverwerking bij het staatsexamen uitsluitend getoetst wordt volgens de oude variant.
Deze opschorting biedt de examinatoren van het staatsexamen de mogelijkheid met deze wijze van examineren ervaring op te doen bij de eindexamens in de schooljaren 1994-1995 en 1995-1996.

Verder is de duur van het mondeling examen gelijkgesteld met die voor de overige vakken, te weten 25 minuten. Dit was 50 minuten.
Alleen bij de toetsing van de *nieuwe* variant is er voor de kandidaat een voorbereidingstijd; deze is gelijk aan 25 minuten.

▼ Tot slot

Lagerwerf heeft naar mijn smaak een boeiend, 'nuttig' en plezierig leesbaar boek geschreven - niet alleen voor diegenen die met de basisvorming te maken hebben, maar voor alle wiskundedocenten die in het voortgezet onderwijs bezig (zullen) zijn.
Je zou kunnen zeggen dat het volgens de TVS-principes geschreven is: veel Toepassingen (voor de les), aandacht voor onderwijs-Vaardigheden, en Samenhang in de zin van de verbindende niveau-theorie.

Is het een 'compleet' boek? In ieder geval is het veelomvattend. Zelf vind ik het gedeelte over het belang van *reflectie op het geleerde* nogal beknopt - met name gezien het gevaar dat de leerling door de bomen van de contexten misschien het bos van de wiskundige kern niet meer ziet. Een ander 'hot item' van de basisvorming maar ook de Tweede Fase betreft (geïntegreerde) *studievaardigheden* zoals het sturen van je eigen leerproces. Lagerwerf heeft er zeker het een en ander over opgeschreven, maar het zit er een beetje 'verstopt' in. Tenslotte mis ik expliciete aandacht voor de *verschillende typen vaardigheden die leerlingen zich eigen moeten maken*: wiskundig-technische vaardigheden verschillen immers nogal van vaardigheden die zich richten op de meer algemene probleemaanpak. (Op ondermeer dat onderscheid leggen we in de postdoctorale lerarenopleiding in Groningen wél accenten.)

Aardig is tenslotte dat Lagerwerf zijn eigen niveautheorie toepast om de lezer de begrippen uit die niveautheorie eigen te laten maken: Hoofdstuk 1 is bedoeld als 'beeldvorming' van begrippen als beeldvorming en schematisering. In hoofdstuk 2 vindt (min of meer) 'schematisering' van de niveautheorie plaats. Alleen de 'theorievorming' ontbreekt... Die is overigens ook nog niet voltooid; in hun artikel 'Niveaus in het leren' (zie voetnoot 3) geven Lagerwerf en Korthagen aan dat de theorievorming rond de niveautheorie nog volop in ontwikkeling is. Ik wacht in spanning af!

Marja Bos

Noten

1 *Bram Lagerwerf*
Wiskundeonderwijs in de basisvorming
Wolters-Noordhoff, 1994
222 bladzijden; *f* 45,–
ISBN 90-01-52022-7

2 Zie blz. 218 in het aprilnummer van jaargang 69 van Euclides (1993/1994)

3 'Niveaus in het leren' door *A. Lagerwerf* en *F.A.J. Korthagen*. In: Tijdschrift voor Didactiek der Bèta-wetenschappen 11 (1993) nr. 3

Mededeling

Voorbeeldexamens wiskunde mavo en vbo (C- en D-niveau)

In het Gele Katern 22a d.d. 28-9-1994 bij het blad Uitleg van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen, zijn als CEVO-mededeling op de bladzijden 53 t/m 68 de experimentele examens voor het C- en D-niveau, eerste tijdvak 1994, afgedrukt. Deze examens gelden als voorbeeldexamen; vanaf 1994 zullen ze elk jaar in het Gele Katern worden bekendgemaakt. In 1997 zullen alle scholen het examen volgens het nieuwe programma moeten afnemen. Naast de opgaven zijn ook de antwoordmodellen afgedrukt.
De CEVO plaatst nog de volgende kanttekeningen:
1. De CEVO stelt alleen het centraal examen vast; ook het schoolonderzoek zal vernieuwd moeten worden. Daarvoor zijn de scholen zelf verantwoordelijk.
2. De examens geven de stand weer van het experiment in 1993-1994. Het is mogelijk dat in de experimentele periode nog een verdere ontwikkeling plaats vindt.
3. In deze experimentele periode is het nog enigszins aftasten wat van leerlingen gevergd kan worden. In 1994 bleek dat bij het D-examen redelijk goed ingeschat, maar het C-examen leverde te veel problemen op.
4. Het experimenteel examen bestaat nu geheel uit open vragen, het reguliere examen voor 50 % uit meerkeuzevragen. De CEVO heeft nog geen definitieve beslissing genomen over de vraagvorm in de nieuwe wiskunde-examens.

Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten

De Docenten In Opleiding (DIO's) aan de Rijksuniversiteit te Groningen hebben in de laatste fase van de opleiding (cursusjaar '93-'94) onderzoek verricht met medewerking van verschillende scholen.
De meeste onderzoeken betreffen Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten (GWA) in de brugklas. Een overzicht van de verschillende GWA's staat hieronder:

* GWA-1, CSG Oostergo, Dokkum
  Onderzoek: 'Een schoolfeest bouwen'.

Een tweede klas organiseert een brugklasfeest. De collega's van de vakken aardrijkskunde, geschiedenis, Nederlands, tekenen en wiskunde dragen, samen met de klas, hun steentje bij om dit feest te laten slagen.

* GWA-2, Gomarus College, Groningen, en Fivel College, Delfzijl.
  Onderzoek: Integratie van onderwerpen uit de bijbel met het wiskunde-onderwijs.

De onderwerpen die aan bod komen zijn: het geslachtsregister van Adam, de tabernakel, tandwielen, en het drankorgel.

* GWA-3, De Waezenburg, Leek, en CSG Comenius, Leeuwarden.
  Onderzoek over één van de mogelijke werkvormen in het toekomstige vwo.

De lessen wiskunde A worden gegeven in een collegevorm, die vrijwel identiek is aan het onderwijs dat op de universiteiten wordt aangeboden.

* GWA-4, Röling College, Groningen, Wessel Gansfort College, Groningen, en Kamerlingh Onnes College, Groningen.
  Onderzoek: 'De sportdag'.

De leerlingen van een school gaan een sportdag organiseren, waarbij alle leerlingen aan zes onderdelen meedoen. De estafette wordt door de vijf snelste leerlingen van iedere klas gelopen.

* GWA-5, Maartens College, Groningen, en Zernike College, Groningen.
  Onderzoek 1: 'De hoogtemeter'.

De leerlingen bepalen de hoogte van een hoog object.
Onderzoek 2: 'Verkeersopdracht'.
De leerlingen proberen uit te vinden of bepaalde verkeerslichten eerlijk staan afgesteld en ze onderzoeken hoe een bestaand kruispunt aangepast moet worden door de komst van verkeerslichten.

Als u interesse hebt in het lesmateriaal en in de uitgevoerde evaluatie-onderzoeken, dan kunt u contact opnemen met

Martha Witterholt
Wiskundedidactiek R.U.G.
Postbus 800
9700 AV Groningen
telefoon 050-637121.

Mededeling

CIEAEM 47

Van 23 tot en met 29 juli 1995 wordt in Berlijn het 47e congres van de CIEAEM gehouden, onder de titel *Mathematics (Education) and common sense: the challenge of social change and technological development*.
De afkorting CIEAEM staat voor *Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, in het Engels *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education*.
Thema's die aan de orde komen zijn:
1 Mathematics and common sense.
2 The teaching and learning aspect.
3 The impact of social changes.
4 The impact of technological development.
5 The cognitive and epistemological aspect.
6 The innovative aspect.
Uitgenodigde sprekers zijn Philip Davis (USA), Alan Bishop (Australië), Juliana Szendrei (Hongarije) en Rijkje Dekker (Nederland).
De inschrijvingskosten bedragen DM 150,– , na 15 januari 1995 DM 200,– .
Geïnteresseerden die de uitgebreide tweede aankondiging van CIEAEM 47 willen ontvangen, kunnen zich daartoe opgeven bij
Prof. Dr. Christine Keitel,
Freie Universität Berlin,
FB 12, WE 02,
Habelschwerdter Allee 45,
D-14195 Berlin,
Duitsland.

Deze jaargang is Euclides in een nieuwe jas gestoken. Wie zou niet actief willen meewerken aan het maken van dit mooie produkt?
De redactie roept collega's op zich te melden voor de volgende twee vacante redactiefuncties:

EUCLIDES

Bureauredacteur

Secretaris

Collega's met belangstelling voor een van deze functies kunnen zich melden bij de voorzitter van de redactie: Bert Zwaneveld, tel.nr. 043-256413. Na een gesprek met de sollicitatiecommissie, bestaande uit de voorzitter, de hoofdredacteur en een vertegenwoordiger van het bestuur, vindt benoeming door het bestuur plaats op advies van de commissie.

De **bureauredacteur** heeft tot taak een geaccepteerd artikel zo redactioneel en illustratief te bewerken dat het door de eindredacteur in een nummer kan worden opgenomen. Als de vacature vervuld is zijn er twee bureauredacteuren. Dit werk kost ongeveer een avond per week gemiddeld. Belangrijk is dat de bureauredacteur onder de druk van deadlines kan werken. De bureauredacteur vergadert met de voltallige redactie drie keer per jaar.

De **secretaris** heeft de zorg voor de vergaderingen van de redactie: afspraken maken, uitnodigingen rondsturen en de notulen maken.
Naast de drie vergaderingen met de voltallige redactie zijn er nog drie vergaderingen per jaar met de kernredactie.
Tevens is de secretaris reserve-bureauredacteur.
Er moet op ongeveer een avond per twee weken gemiddeld gerekend worden.

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt 3 × 54 = 162 regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier 2 × 54 = 108 regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 7 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 5 weken.

Adressen van auteurs

G. Bakker, F.J. Mahieu
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

N. Brokamp e.a.
J. de Bosch Kemperstr. 24
2401 KA Alphen a/d Rijn

K. Hoogland
Generaal Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

M.P. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

P.W.H. Lemmens
R.U.U., fac. wisk. en inf.
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Zs. Ruttkay
B. van Beeklaan 15
1241 AC Kortenhoef

P. van Wingerden
Ch. de Bourbonlaan 66
3708 CD Zeist

Kalender

14 december 1994
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

7 januari 1995
Amersfoort

Wintersymposium
Zie bladzijde 89

18 januari 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

14 februari 1995
Rotterdam

Regiobijeenkomst NVvW

16 februari 1995
Amsterdam

Regiobijeenkomst NVvW

21 februari 1995
Zwolle

Regiobijeenkomst NVvW

23 februari 1995
Eindhoven

Regiobijeenkomst NVvW

Gedachten en overwegingen in de didactiekcommissie

Kunnen we door vragen leren? III

Piet van Wingerden

De leerling is ontsteld.
Gisteren wist hij alles. Hij heeft geen moeite gehad met het oefenmateriaal. En nu zijn er opgaven, die heel anders zijn, denkt hij. Hij ervaart de repetitie als veel te moeilijk. Hij vindt het niet eerlijk.

Dank je de koekoek!
Deze leerling kan zichzelf slechts één vraag stellen: 'Waar is de mens die mij helpt?'
Hij zoekt het misschien bij zijn knappe buurvrouw.
Maar beter is het zichzelf vragen te stellen, zoals:

- Wat valt me hierbij te binnen…?
- Kan ik er een tekening bij maken?
- Heb ik het goed gelezen?
- Kan ik de gegevens in eigen woorden zeggen?
- Kan de vraag op een andere manier gesteld worden?
- Wat zijn de belangrijkste woorden in de opgave of in de vraagstelling?
- Wat is dat ook al weer: …?
- Zou een getallenvoorbeeld kunnen helpen?
- Zou ik er met eenvoudige getallen uitkomen?

Het zal duidelijk zijn dat de wiskundedocenten zelf dit soort vragen aan de leerlingen moeten onderwijzen. Niet pas vlak voor een repetitie even snel een overzichtje geven.
Neen!
De leerlingen die tijdens de les vastlopen bij het oefenwerk moeten dit soort vragen steevast te horen krijgen van de docenten. Het lijkt me goed dat deze vragen achteraf nog eens aan de pupil worden voorgehouden.
We kunnen het gesprek afsluiten met de vragen:
'Wat was er nou zo moeilijk aan?'
'Had je het eigenlijk niet zonder mijn hulp gekund?'

Tijdens de wiskundeles liet ik wel eens leerlingen een al of niet voorbereid probleem op het bord behandelen. Als zo'n leerling niet verder wist mocht hij aan de klas een vraag stellen. De vraag: 'Hoe moet ik verder?' was verboden.
Toegestane vragen waren bijvoorbeeld:

- 'Wat is een uiterste waarde?'
- 'Wat zijn nulpunten?'
- 'Wat is een mediaan?'
- 'Wat bedoelen ze met een kansverdeling?'
- 'Wat is een lichaamsdiagonaal?'
- 'Is er al een fout gemaakt? In welke regel?'

Die vragen mochten vanuit de klas beantwoord worden.
Als de leerling voor het bord fouten maakte, mocht er geholpen worden. Bij voorkeur door vragen te stellen, zoals:

- 'Is de afgeleide wel goed?'
- 'Kun je zeggen wat een mediaan is?'
- 'Weet je nog wat de opdracht is?'
- 'Jouw grafiek gaat door de oorsprong. Is dat wel goed? Hoe kun je dat controleren?'

Met een beetje voorbereiding op deze spannende gebeurtenis en onder voorwaarde het niet te lang te laten duren, werden zulke seances gewaardeerd.
Maar zoals bij alcoholreclame vermeld dient te worden, zeg ik ook bij deze werkvorm: met mate.

Op de samenkomsten van de didactiekcommissie zochten we naar lectuur over het vragen stellen.
Natuurlijk kwamen we o.a. terecht bij de grootste vragensteller aller tijden, Socrates.*
We hebben geprobeerd de dialogen als voorbeeld te nemen. Maar de aard van de onderwerpen bij Socrates is van een andere orde dan van die in de schoolwiskunde.
Bij Socrates gaat het over vriendschap, rechtvaardigheid, deugd.
Dat is wel iets anders dan de begrippen die in de wiskundelessen worden aangesneden. Bovendien is Socrates niet - zoals de goed opgeleide wiskundeleraar - de wetende die zijn kennis aan anderen meedeelt. Socrates betuigt herhaaldelijk dat hij met zijn gesprekspartner als gelijkwaardige op zoek wil gaan naar inzicht in het gespreksonderwerp.
Bij die zoektocht stelt hij echter



tussenvragen waarmee richting aan het gesprek wordt gegeven. Hij weet dan welke tussenantwoorden te verwachten zijn. Dat is iets wat wij in ons wiskunde-onderwijs ook kunnen doen.
Het lezen van de dialogen van Socrates is om die facetten waardevol.
En ook wegens de vanzelfsprekendheid bij Socrates
- om te vragen,
- om ter verantwoording te roepen,
- om de consequentie van de gegeven antwoorden te onderzoeken,
- om met zijn vragen naast zijn gesprekspartner te gaan staan,
- om zijn herhaalde verzekering dat hij belangstelling heeft in het nog te geven antwoord.

Ja, zoiets is belangrijk.
Ik denk dat we onze leerlingen geweldig stimuleren als ze merken, dat wij in spanning luisteren bij hun poging antwoorden op onze vragen te formuleren. En als we bereid zijn de verkeerde antwoorden met wat doorvragen recht te zetten.

Daarmee is niet beweerd dat we socratisch bezig zijn. Zo simpel is dat niet.
Maar een klein beetje mogen we toch wel van deze meestervrager in ons pakket meenemen?

* Zie o.a. *Platoon Verzameld Werk* (11 delen), uitgave De Driehoek, Amsterdam.
Er is ook een uitgave begonnen van het verzameld werk van Plato bij de uitgever Bert Bakker.







Zonder meer de moeite waard…

Geweldig interessante en leerzame week…

Zeer verfrissend…

Opgedane ervaringen zullen nieuwe impulsen aan eigen wiskunde-onderwijs geven…

Denkend aan Schotland zie ik prachtige uitzichten…

Bijzonder inspirerend…

Een Schot in de roos - verslag van een studiereis

Niek Brokamp
Ynske Schuringa
*Berend Wielens**

Inleiding

Het Europees Platform voor het Nederlandse onderwijs organiseert een studiebezoek voor docenten wiskunde aan Schotland.
Het doel van dit studiebezoek is een beeld te krijgen van de verschillende facetten (inhoudelijk en didactisch) van het wiskundeonderwijs in Schotland. Schotland heeft een eigen onderwijssysteem, los van het Engelse.
Centraal staan de bezoeken aan verschillende scholen. De universiteit van Stirling verleent medewerking aan de vakinhoudelijke component.

Dit was de aanhef van een mededeling in Euclides 69-5, en die bleek wervend genoeg, want een (te) groot aantal leraren meldde zich aan! De 31 deelnemers (waaronder de drie auteurs van dit verslag) werden uitgekozen, waarbij gelet werd op o.a. spreiding over het land en over de verschillende schooltypes van vbo tot en met vwo.

Bij het vertrek op Schiphol stonden we nog wat onwennig tegenover elkaar op de vroege ochtend van 2 mei 1994, samen met reisleidster Astrid Attali. Een week later namen we daar afscheid van goede bekenden en nieuwe vrienden. Dat was namelijk ook een heel aardig aspect van deze studiereis: het contact met een grote groep Nederlandse wiskunde-collega's.

Het reisprogramma

Kort samengevat zag het reisprogramma er als volgt uit:

maandag 2 mei
ochtend: vliegreis Schiphol- Edinburgh.
middag: vrij.

dinsdag 3 mei
ochtend: St. Andrews College, Bearsden; Gerry McKaig bespreekt kenmerken van het Schotse wiskunde-onderwijs.
ochtend/middag: bezoek aan middelbare scholen in Glasgow.

woensdag 4 mei
ochtend: Stirling university, lezing door Alex Hunter: Overview of Mathematics in Scottish Schools.
ochtend/middag: bezoek aan basisscholen in (omgeving) Stirling.

donderdag 5 mei
ochtend: Stirling university, lezing van prof.Jon Greenman over gebruik van computerprogramma's door wiskunde-studenten.
ochtend/middag: bezoek aan middelbare scholen in (omgeving) Stirling.
avond: Edinburgh university, lezing door prof.Barbara Jaworski (Oxford university): 'Trying to see inside their heads'.

vrijdag 6 mei
ochtend: Edinburgh university, mathematics workshop (John Searl).
middag: evaluatiegesprek; bezoek aan museum of vrij.

zaterdag 7 mei
vrij.

zondag 8 mei
ochtend: vliegreis Edinburgh-Schiphol.



De hele groep, met Jon Greenman en Alex Hunter (links vooraan)

Hoe zag een studiedag eruit?

Het vervoer was goed geregeld. Iedere dag haalde de bus met chauffeur Alan ons op. Hij wachtte gedurende de lezingen op ons en reed vervolgens langs de verschillende scholen waar we in groepjes van 5 of 6 werden afgezet; na enkele uren werden we in dezelfde volgorde weer opgehaald.Tijdens de terugreis naar het hotel in Edinburgh wisselden we de opgedane ervaringen met elkaar uit.
Na het diner gingen we meestal in groepjes naar het centrum van Edinburgh - een bijzonder mooie stad! - om te eindigen in een gezellige pub.

De scholenbezoeken

Op de scholen werden we steeds gastvrij ontvangen, hoewel we in een enkel geval onverwacht kwamen. Het bijwonen van de wiskundelessen vormde natuurlijk de hoofdmoot van het bezoek. Verder kregen we ook veel uitleg over systemen en werkwijzen, en konden we vragen afvuren op zowel leraren als leerlingen. En er werden ons ook vragen gesteld natuurlijk! Vooral op de primary schools wilden de kinderen van alles weten over Nederland. De lunch op school in de kantine samen met de leerlingen was een belevenis apart. Daar en ook in de lessen viel de discipline op die er heerste.

De Schotse middelbare school

De regio waar je woont bepaalt naar welke primary school je gaat en een comprehensive secondary school (streekschool) krijgt automatisch alle leerlingen van de haar toegewezen primary schools. Er is dus geen onderlinge concurrentie tussen scholen.
Er zijn wel grote verschillen tussen de scholen, die vooral veroorzaakt worden door de ligging; een school in een welgestelde buurt en een in een wijk met 50% werkloosheid geven grote contrasten te zien. Op scholen met veel ‘achterstandskinderen’ worden extra lessen gegeven, waarvoor de overheid ook extra betaalt.
Wat in het Schotse middelbare



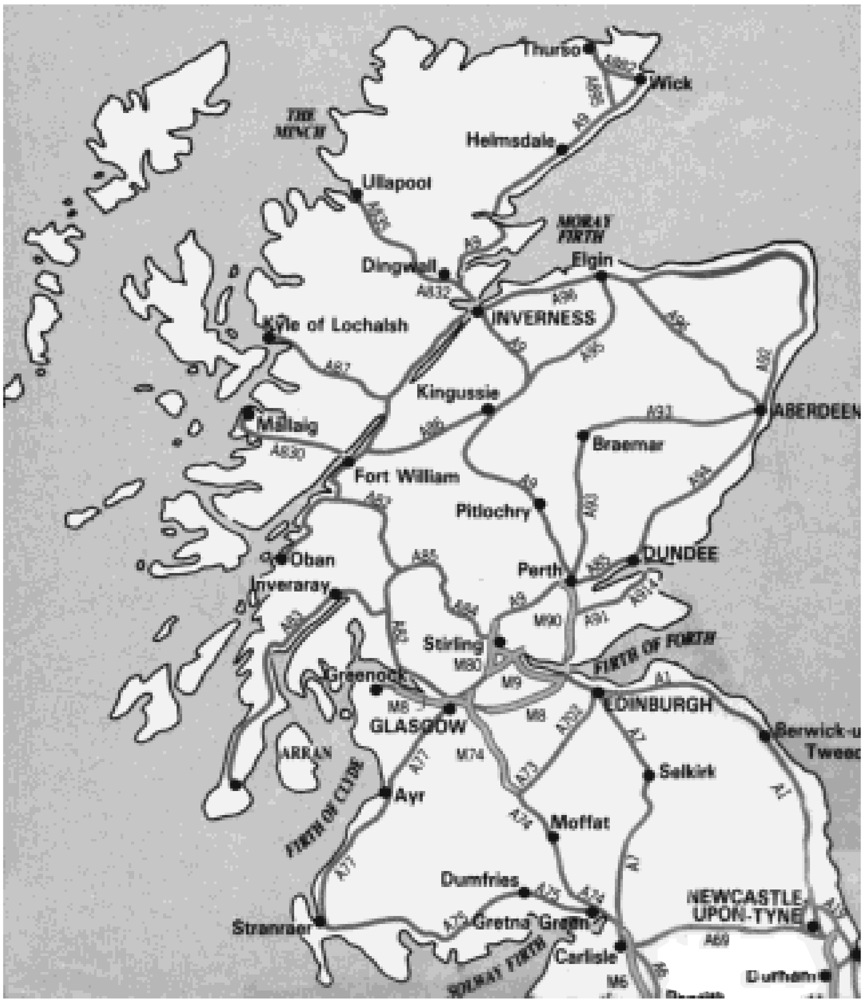
school-systeem anders is dan bij ons is dat ook een leerling die zich op havo/vwo-niveau bevindt elk van zijn 7 vakken op een voor hem passend niveau kan volgen, en er examen in kan afleggen.
Als leerling leg je na vier jaar een landelijk examen af op één van de drie mogelijke niveau's: *foundation*, *general* of *credit*. Het is dan ook geen kwestie van slagen of zakken, want je krijgt altijd een papier waarmee je in een bepaalde richting verder kunt.



Brug over de Firth of Forth

Het Schotse wiskundeonderwijs

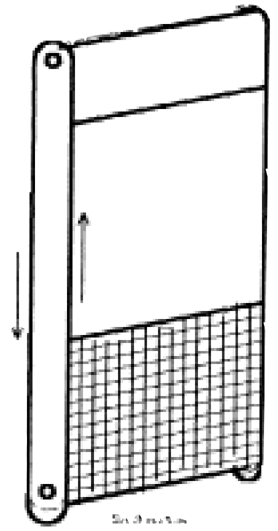
Onze indruk is dat de Schotse onderbouw-wiskunde weinig verschilt van de wiskunde in ons nieuwe programma. Ook in Schotland is de wiskunde realistisch en contextrijk.
In de eerste twee leerjaren van de middelbare school zitten leerlingen van alle niveaus in dezelfde klas. Ze zijn bijna uitsluitend individueel bezig, want ze werken tegelijkertijd uit verschillende boekjes aan verschillende onderwerpen. Deze heterogene groepen worden aangeduid met '*mixed ability*'. De leraar is een soort boekhouder geworden. Zoals een van de Schotse collega's zelf opmerkte: een docent moet als een jongleur proberen zes ballen tegelijk in de lucht te houden. We misten het klassegesprek, de discussie tussen leraar en leerling en tussen leerlingen onderling, het '*chalk and talk*' is grotendeels uit de eerste twee klassen verdwenen.
Men is zelf ook niet onverdeeld enthousiast over de ver doorgevoerde individualisering, bleek ons uit reacties van de Schotse leraren.



Opvallende verschillen

- Op de primary school wordt ook al aan *problem solving* gedaan. Een voorbeeld: in P6 (de op een na hoogste klas) kregen vier jongens de opdracht om uit te zoeken hoeveel handdrukken er gegeven worden als in een groep van 7 personen elke persoon

iedere andere persoon een hand geeft. Dit werd eerst uitgeprobeerd in groepjes van 3, 4, 5 … enz., waarbij leerlingen die met iets anders bezig waren even moesten komen helpen. Nadat de tellingen waren gedaan ging de lerares met het viertal eens kijken of er regelmaat te ontdekken was.





FORMULAE LIST

The equation $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents a circle centre $(-g, -f)$ and radius $\sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$.

The equation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ represents a circle centre (a, b) and radius r.

Scalar Product: $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$, where θ is the angle between $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$

or

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \text{ where } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ and } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Trigonometric formulae:

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$
$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

Table of standard derivatives:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin ax$	$a \cos ax$
$\cos ax$	$-a \sin ax$

Table of standard integrals:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin ax$	$\frac{-1}{a}\cos ax + C$
$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax + C$

Formulelijst bij examen

- De rekenmachine wordt van meet af aan gebruikt, ook de graphic calculator heeft in het Schotse onderwijs, in de hogere leerjaren, zijn intrede gedaan. Computers zijn in ruime mate aanwezig en worden veel gebruikt, meer dan bij ons.
- Opvallend zijn de met wiskundig materiaal rijk aangeklede muren in de wiskundelokalen, er hangen veel schitterende posters.
- Uniek vonden we het Schotse schoolbord: niet het klassieke zwarte krijtjesbord, maar een modern rond te draaien wit linnen (?) bord, dat beschreven kan worden met allerlei kleuren viltstiften. Het beschreven gedeelte kan de leraar eenvoudig naar boven draaien. De afmetingen zijn ca. 1,5 m breed en 2,5 m hoog. Een gedeelte van de rol bevat ruitjes.
- Boeken, schriften, rekenmachines en andere materialen blijven meestal op school, gaan dus niet mee naar huis. De leerlingen in de lagere klassen hebben dan ook geen (of weinig) huiswerk! Ze zitten niet langer op school dan

onze leerlingen, maar werken in de klas zelfstandig in eigen tempo de stof door. Het ‘eindpunt’ na een schooljaar is niet voor de hele klas hetzelfde.

- Ongeveer een derde deel van de leerlingen doet mee aan de wiskunde- olympiade, wat natuurlijk stimulerend werkt.

- Bij de testen en examens worden formules gegeven en de standaard afgeleiden en primitieven.

- Ongeveer 50% van de wiskundedocenten is vrouw.

- In Schotland gaan jongens en meisjes gelijk op wat interesse in wiskunde betreft, en gelijke percentages jongens en meisjes gaan wiskunde studeren. Dit is in de rest van Europa anders, maar een verklaring is moeilijk te vinden.

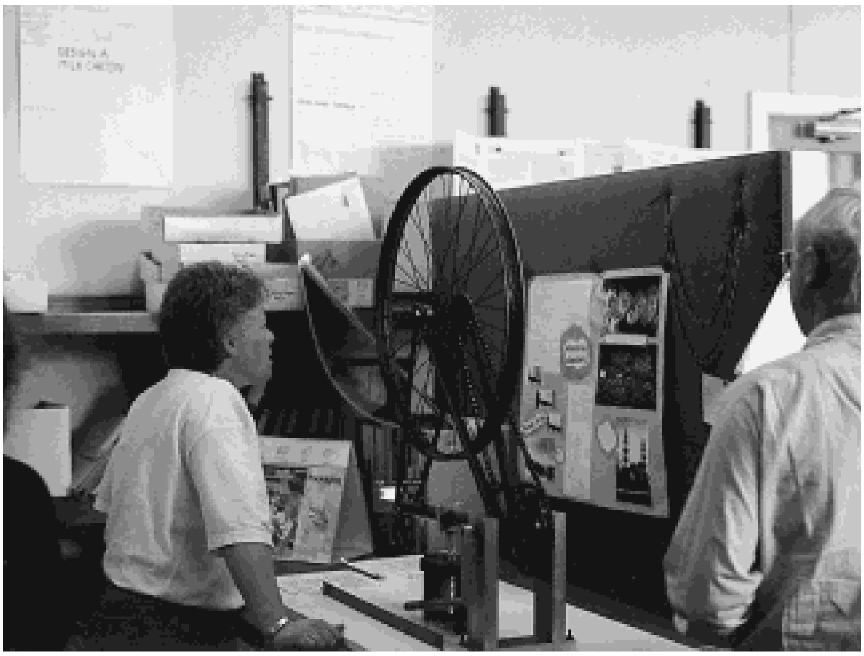
JOHN NAPIER
BARON OF MERCHISTON
1550-1617



Many notable mathematicians have lived and worked in Edinburgh. James Gregory designed a reflecting telescope in the early 18th century. A little later Colin Maclaurin provided the mathematical basis for the management of pension funds. In this century Edmund Whittaker, Alexander Aitken and Arthur Erdelyi made outstanding contributions to mathematical research. The most famous Edinburgh mathematician is probably John Napier.His discovery of logarithms and his invention of a computational aid called Napier’s Bones greatly reduced the labour and difficulty of the complex numerical calculations needed for the advancement of science and technology from the beginning of the seventeenth century up to the middle of the twentieth century.

Wiskundeleraar in Schotland

In Schotland is er slechts één manier om wiskundedocent te worden: na het behalen van een (aanverwante) universitaire graad één extra jaar lerarenopleiding. Een wiskundeleraar is inzetbaar in alle klassen van de middelbare school. Een volledige baan omvat 40×40 wekelijkse minuten, waarvan minimaal 6×40 minuten non-lesuren zijn (bestemd voor vergaderen en ouderavonden bijvoorbeeld).



De invloed van ouders is wat groter dan bij ons; regelmatig *parents-evening* waarbij de vraag gesteld kan worden: wat doet u eraan om mijn kind op een hoger niveau te laten presteren?
Het niveau van de klas is bepalend voor de klassegrootte: in een foundation-klas (laagste niveau) zitten ongeveer 15 leerlingen, in een creditklas kunnen dat er 2 keer zoveel zijn.
Elke docent wordt ieder jaar beoordeeld door de schoolleiding; verplichte nascholing kan het gevolg zijn.
Een Schots sectiehoofd (principal teacher, head of department) heeft meer taken en verantwoordelijkheden dan zijn Nederlandse collega.



Wiskunde is iets om te DOEN!

Op vrijdagochtend werden we ontvangen op de universiteit van Edinburgh voor een wiskunde-practicum. We mochten weer even middelbare school-leerling zijn en stoeien met materiaal dat aan de universiteit is ontwikkeld.
In twee- en drietallen heeft iedereen aan twee opdrachten gewerkt. Stuiterende balletjes die een exponentieel groeiproces beschrijven, weegschalen om de som van een meetkundige reeks te benaderen.
Een collega schreef in haar eigen verslag:

Ik had niet verwacht een wc-rol van 60 meter uit te rollen in de gang van het mathematisch instituut aldaar en er nog lol in te hebben ook! De werkelijkheid scheelde trouwens zo'n 20 meter met onze metingen en berekeningen.

Zelfs collega's die een wiskundewerklokaal met gemengde gevoelens binnentreden werden enthousiast.
Deze mathematische workshop bood inspirerende aanknopingspunten voor de eigen lessituatie.
Als je je klassen af en toe zo'n praktijkles zou aanbieden, zou daar ongetwijfeld een extra stimulerende werking voor leerlingen van uitgaan!

Over de organisatie

Als echte Nederlanders wisten we bij de evaluatie aan het eind van de week natuurlijk heel goed aan te geven wat er beter had gekund.
Het tijdstip van de reis was wat ongelukkig omdat, iets eerder dan bij ons, de examenklassen niet meer aanwezig waren. (Wel kregen we oude examens mee, zodat we een idee van het niveau hebben gekregen.)
Ons hotel was in Edinburgh, wat voor de bezoeken aan Glasgow en



Stirling lange reistijden betekende. Scholenbezoeken in Edinburgh waren aanvankelijk wel gepland, maar, omdat de aangezochte scholen daar een grote som geld voor vroegen, later toch weer afgelast. Over het hotel schreef een deelnemer in zijn verslag treffend:
Het hotel was aangenaam centraal gelegen in Edinburgh, had een goed slaapcomfort en de kwaliteit van het eten had - mede dankzij de positief kritische instelling van de zeer plezierige groep collega's - een hoge amusementswaarde.

Eindoordeel

Het was een fantastische week!

* Onze hartelijke dank aan alle reisgenoten die zo vriendelijk waren hun persoonlijke verslag - met foto's - aan ons te sturen. Van dit materiaal hebben we veelvuldig gebruik gemaakt.

40 jaar geleden

De betekenis van het vraagstuk voor onderwijs en eindexamen

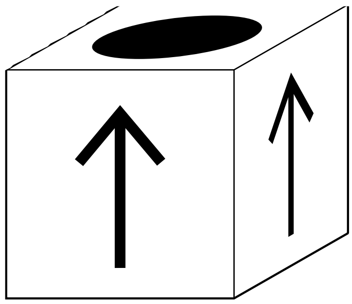
De Commissie stelt er prijs op toe te lichten waarom naar haar mening, ondanks de centrale plaats die het vraagstuk als hulpmiddel in het wiskundeonderwijs inneemt en moet blijven innemen, er toch ten aanzien van de vraagstukkentechniek ingrijpende beperkingen mogelijk en wenselijk zijn.
Zij ziet de functie van het vraagstuk als volgt:
1 het is een middel voor leraar en leerling om te controleren of de theorie werkelijk begrepen is;
2 het kan de leerling een beter inzicht doen verwerven in de bewijstrant van de wiskunde;
3 het is onontbeerlijk voor het verwerven van de nodige technische vaardigheid;
4 het kan een gewenste voorbereiding geven voor later te behandelen leerstof;
5 het kan dienen om contacten tot stand te brengen tussen het terrein van de wiskunde en andere gebieden.
Bij de vraagstukken die op school en op het examen gemaakt worden, krijgt de leerling de gelegenheid zijn prestaties in de wiskunde te tonen en zijn meer of minder wiskundig begaafd zijn tot uitdrukking te brengen. Onjuist acht de Commissie het echter als de leraar vraagstukkken laat maken met de speciale bedoeling de wiskundige begaafdheid van de leerlingen te onderzoeken. Dit geschiedt helaas nog al te vaak. In verband hiermee is de Commissie van oordeel dat vraagstukken die een sterk beroep doen op het inventief vermogen en door de meerderheid van de leerlingen die overigens het wiskundeonderwijs op normale wijze kunnen volgen, niet zelfstandig kunnen worden gemaakt, te veroordelen zijn.
Bij de algebra hebben de leerlingen inzicht te verwerven in de gevolgde methoden en technische vaardigheid in het gebruik daarvan. Voorkomen moet nu worden dat het vraagstukkenmateriaal technisch gecompliceerder wordt gemaakt dan met het oog op het verdere wiskunde-onderwijs noodzakelijk moet worden geacht. Technische complicaties kunnen zo licht oorzaak zijn dat inzicht in het wezenlijke van de methode de leerlingen onthouden blijft. En om het inzicht is het te doen.

Uit het rapport van de Leerplan-commissie 1954 van Wimecos inzake het opstellen van een ontwerp-leerplan en een ontwerp-examen-programma voor wiskunde voor de HBS-B, in Euclides 30, 1954 -1955.

Werkblad

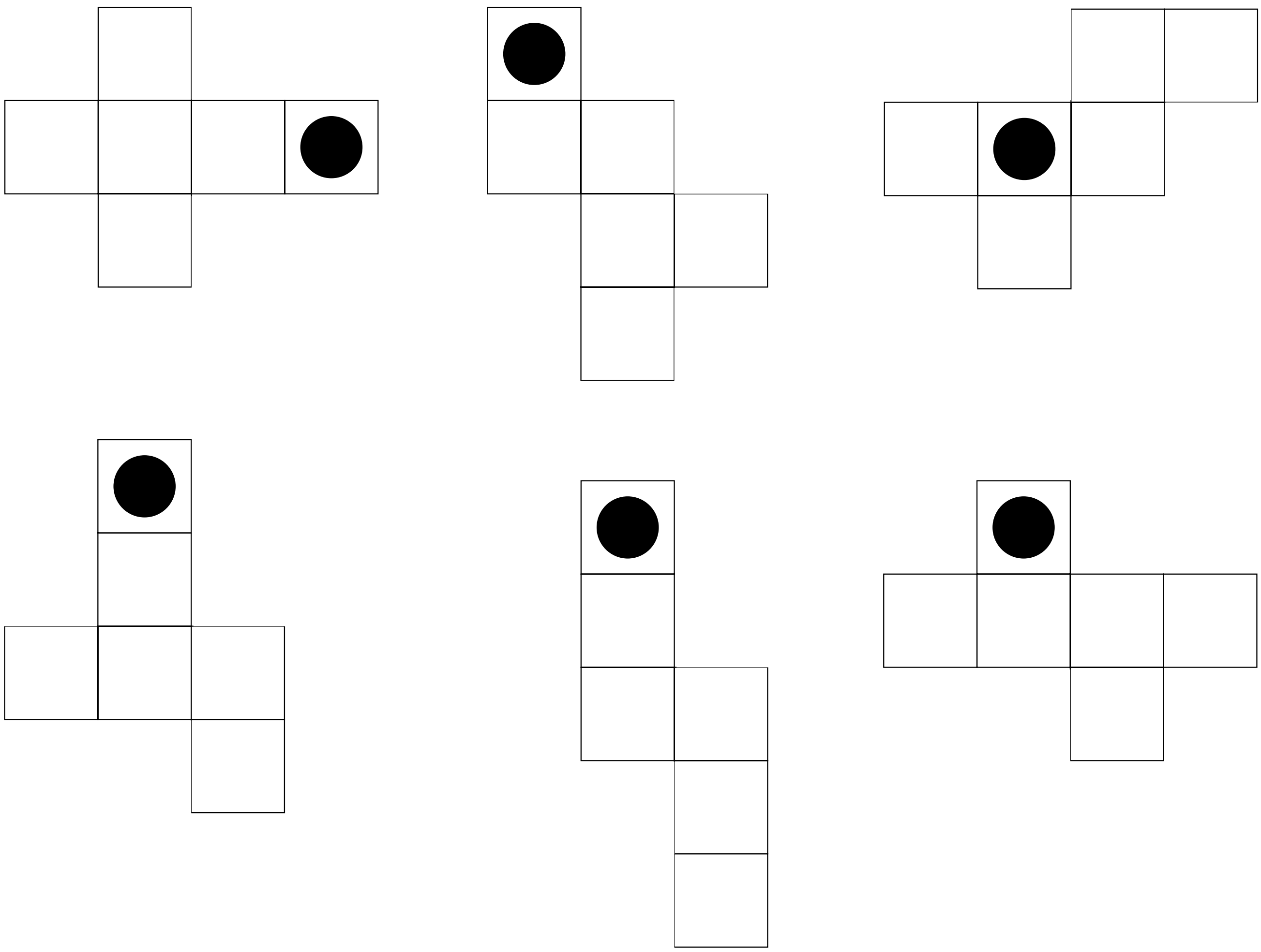
Lichamen

1 Een fabriek verzendt dure apparaten in kisten. Het is belangrijk dat de kisten rechtop blijven staan. Daarom komt er op de voor- en achterkant een pijl te staan, die naar boven wijst. Op de bovenkant komt een grote, ronde, rode sticker.



Hieronder staan 6 uitslagen van de kist. De rode sticker is er al opgeplakt.

Teken in alle uitslagen de 4 pijlen. Let op dat ze de goede kant op wijzen!

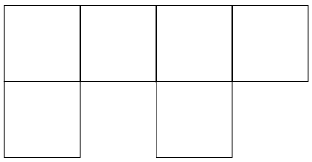


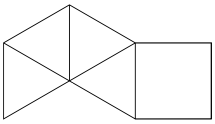
Uit: proefwerk H/V1 van een C-school, experiment W12-16.

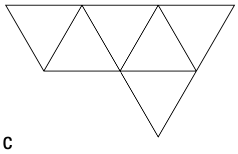
Werkblad

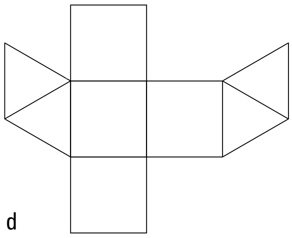
Lichamen

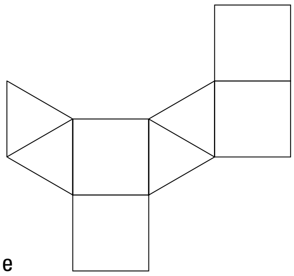
2 Hier zie je een aantal uitslagen.
Maak ze na en kijk steeds of ze in elkaar te zetten zijn tot een ruimtelichaam.

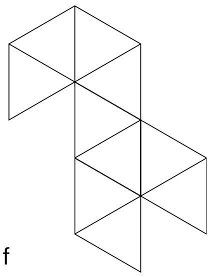

a

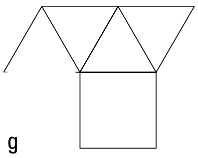

b

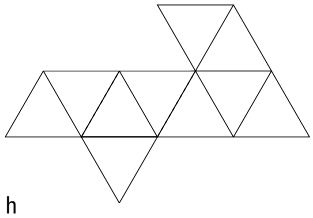

c

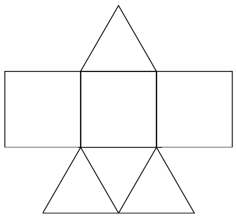

d

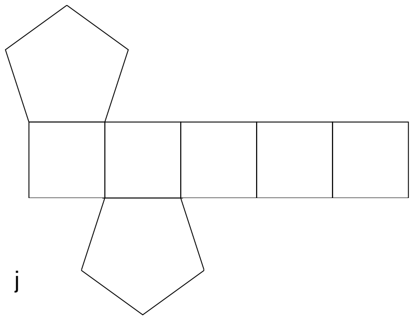

e

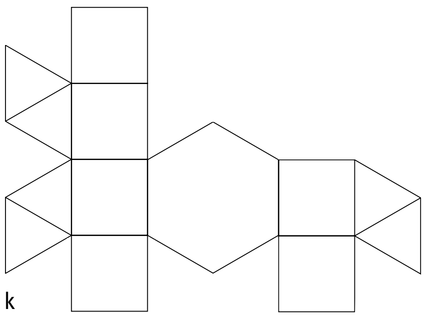

f


g


h


i


j


k

Uit: proefwerk H/V1 van een C-school, experiment W12-16.

Recreatie

Opgave 658

Kermis in de stad! In het kader van Rekreade ‘94 stond het Malieveld weer vol attracties. Ik had mijn twee kinderen beloofd mee te gaan en aldus geschiedde.

Een van de attracties was als volgt:
Op het eind van een lange goot waren twaalf ronde kuiltjes gemaakt. Ieder kuiltje had een waarde: 11, 15, 17, 18, 22, 25, 27, 29, 30, 33, 35 en 36.
Een speler moest vijf keer 1 bal rollen, die dan in een van de twaalf kuiltjes bleef liggen. Iedere bal in een ander kuiltje. Elke somscore, op 1 na, in het gebied 120 tot en met 145 ontving een klein prijsje. Die ene overblijvende score in dat gebied was bestemd voor de hoofdprijs.

M’n twee kinderen deden het spel en ontvingen ieder een klein prijsje.

Thuis gekomen analyseerde ik het spel en vond ik de volgende toevalligheid: toen m’n oudste de eerste bal rolde kon hij nooit meer de hoofdprijs winnen !

Helaas is de Rekreade voorbij, maar kunt u, lezer, mij vertellen hoeveel punten de hoofdprijs was en in welk kuiltje m’n oudste zijn eerste bal rolde ?

Een goede oplossing, binnen 1 maand ingezonden, levert 5 punten voor de puzzelladder op. Hiermee kunt u altijd beginnen, bijvoorbeeld nu ! Uw punten blijven steeds geldig.
Als u vaak genoeg inzendt wint u uiteindelijk de ladderprijs: een boekenbon van ƒ 25,–.

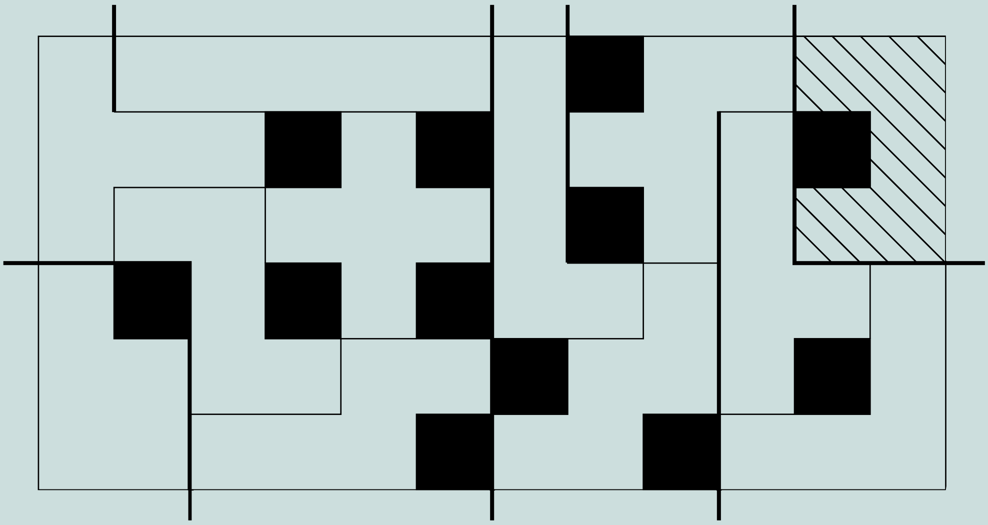
Veel succes !

Oplossing 655

Recreatie

De twaalf pentomino's moesten gezaagd worden uit een rechthoekig stuk triplex van minimale oppervlakte. De zaag kan niet om een hoek zagen. Alleen de U-pentomino vergt nog een speciale behandeling.

Gustaaf Lahousse (13), Grimbergen (B) en *Pieter Torbijn* (57), Den Haag vonden de volgende 6x12 oplossing:



Deze oplossing is door Jon Millington gepubliceerd in het boekje 'Pentominoes' (1987, Tarquin Publ.).

Met zijn inzending komt hij nu op de bovenste trede van de ladder te staan met 57 punten:

Pieter Torbijn
Dignaland 7
2591 CA Den Haag

Heel hartelijk gefeliciteerd met de boekenbon van *f* 25,–.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag

Modulo-rekenen

P.W.H. Lemmens

Mijn aandacht werd getrokken door het artikel 'Deelbaarheid en getallenstelsels' van F. Heierman in Euclides 69, nr. 8, mei 1994, p. 255-256. Het onderwerp is interessant, en er is niets aan te merken op de kwaliteit van de bewijzen, maar naar mijn smaak zijn ze wel iets te zwaar.

Een ander bewijs

Het gaat me om de stelling:
$p - 1$ is een deler van $p^n - 1$,
$p + 1$ is een deler van $p^n - 1$ als n even is,
$p + 1$ is een deler van $p^n + 1$ als n oneven is.

De door Heierman gevolgde methode is bepaald niet gemakkelijk uit te leggen aan leerlingen die wat minder sterk in algebra en volledige inductie zijn. Ik denk dat ik hier liever zou kiezen voor staartdelen met rest van polynomen in X. Dan krijgen we voor $n \geq 1$:

$(X^n \pm 1) = (X \pm 1)$(polynoom) + constante,

en hierin is de constante te bepalen door $X = 1$ of $X = -1$ (afhankelijk van het teken in $X \pm 1$) te nemen.

Dit geeft voor $n \geq 1$:

$X^n + 1$ is deelbaar door $X - 1$ als $1^n + 1 = 0$, dus nooit,
$X^n - 1$ is deelbaar door $X - 1$ als $1^n - 1 = 0$, dus voor alle n,
$X^n + 1$ is deelbaar door $X + 1$ als $(-1)^n + 1 = 0$, dus als n oneven,
$X^n - 1$ is deelbaar door $X + 1$ als $(-1)^n - 1 = 0$, dus als n even.

Hierin is weinig behoefte aan volledige inductie!

Een constructieve aanpak

Een ander punt waarop ik de aandacht wil vestigen, is dat de redenering van Heierman uitgaat van het resultaat, en daardoor een beetje uit de lucht komt vallen.

Het lijkt mij dat het geheel wat constructiever en doorzichtiger zou worden bij de volgende alternatieve aanpak:

In het vervolg zijn x, y, p, q, k gehele getallen. We veronderstellen steeds dat $y \geq 1$.
Dan is x deelbaar door y dan en slechts dan als gehele deling van x door y rest 0 oplevert. Dus

Stelling 1:
x is deelbaar door y dan en slechts dan als $x \equiv 0 \pmod{y}$.

Stelling 2:
Stel dat $p \bmod y = q \bmod y$, dan is

$a \cdot p^3 + b \cdot p^2 + c \cdot p + d \bmod y = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d \bmod y$

Ik stel me voor dat stelling 2 gemakkelijker is dan de stelling in de bijdrage van Heierman. Misschien is stelling 2 zelfs wel algemeen bekend. Als er toch een bewijs nodig is, dan komt dit erop neer dat $(q + k \cdot y)^n$ voor elke $n \geq 1$ gelijk is aan q^n plus een y-voud. Dit is op elementair niveau evident, aangezien q^n in de uitwerking van $(q + k \cdot y)(q + k \cdot y)(q + k \cdot y)\ldots$ de enige term is die niet expliciet de factor y bevat.

Nemen we nu in stelling 2 de situatie zo dat $q = 1$, dus y een deler van $p - 1$, dan komt er:

$a \cdot p^3 + b \cdot p^2 + c \cdot p + d \equiv 0 \pmod{y}$ dan en slechts dan als $a + b + c + d \equiv 0 \pmod{y}$.

En nemen we in stelling 2 de situatie zo dat $q = -1$, dus y een deler van $p + 1$, dan komt er:

$a \cdot p^3 + b \cdot p^2 + c \cdot p + d \equiv 0 \pmod{y}$ dan en slechts dan als $-a + b - c + d \equiv 0 \pmod{y}$.

Hieruit volgen de deelbaarheidscriteria onmiddellijk.

De 'regel van 9'

Overigens zij nog opgemerkt dat de 'regel van 9' een belangrijke test was bij optellingen en vermenigvuldigingen van gehele getallen in de tijd dat alles nog met de hand moest gebeuren.
In het 10-tallig stelsel geldt:
Als $x + y = z$ dan is modulo 9 de som van de cijfers van z gelijk aan de som van de cijfers van x en de cijfers van y.

Als $x \cdot y = z$ dan is modulo 9 de som van de cijfers van z gelijk aan het produkt van de som van de cijfers van x en de som van de cijfers van y.

Dus $123456 + 357890 = 480346$ kan niet goed zijn, want $3 + 5 \neq 7 \pmod{9}$.

De bovenstaande beweringen zijn gevolgen van stelling 2 en van een stelling die zegt

Als $p \bmod y = q \bmod y$ en $r \bmod y = s \bmod y$, dan is $p + r \bmod y = q + s \bmod y$ en $p \cdot r \bmod y = q \cdot s \bmod y$

Hierin zijn ook r en s gehele getallen.

Deze stelling is gemakkelijk te bewijzen met de opmerking gemaakt naar aanleiding van stelling 2.
Overigens zou stelling 2 ook te bewijzen zijn met behulp van de laatste stelling.